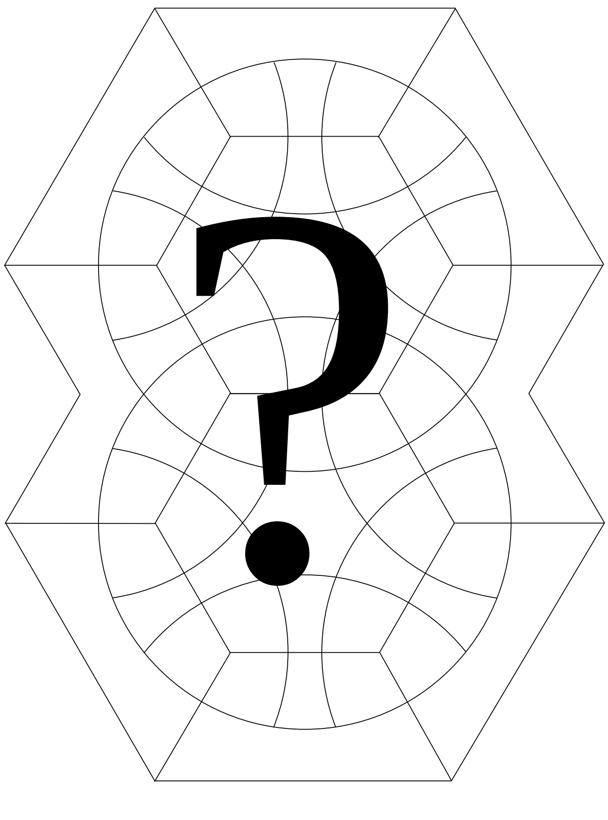
Engel's Enigma - Analyse eines Verdrehpuzzles

Lukas Humbel, 4aN

9. Januar 2006
Maturaarbeit 2005/2006

Kantonsschule Olten
Betreut durch Hr. Marcel Pilloud



Zusammenfassung

Meine Arbeit dreht sich um Engel's Enigma. Es handelt sich dabei um ein Permutationspuzzle, wie beispielsweise auch Rubik's Cube eines ist. Es wird nicht nur das Puzzle selbst vorgestellt sondern auch ein lückenloser Lösungsweg, inklusive benötigtem mathematischen Hintergrund. Dieser beinhaltet vor allem Theorie zu den Permutationen. Zur Simulation und zum Lösen wird ein entsprechendes Programm auf dem Computer erstellt. Abschliessend werden noch einige Untersuchungen zur Lösbarkeit, zur Anzahl möglicher Stellungen und zu der theoretisch maximal benötigten Zuganzahl zum Lösen des Puzzles angestellt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Vorwort

Im Rahmen der Maturaarbeit wollte ich ein Thema untersuchen, welches sowohl eine computertechnische Umsetzung als auch eine fundierte mathematische Analyse erlaubt. Nach einigen Diskussionen einigte ich mich mit meinem Betreuer, Hr. Pilloud, auf die Nachprogrammierung und Analyse eines Rätselpuzzles. Die Grundlage dazu stellt ein Artikel [1] dar, welchen ich von Hr. Pilloud erhalten habe.
Besonderer Dank geht an folgende Personen:

- Hr. Marcel Pilloud für die Betreuung
- Dr. Roland Kamber für zusätzliche Literatur

1.2 Fragestellung

Das Ziel meiner Nachforschungen liegt hauptsächlich darin, möglichst viel über die mathematische Natur des Puzzles zu eruieren. Im Hinterkopf blieb natürlich stets das Ziel, einen Lösungsweg zu finden. Denn Puzzles sind dazu gemacht, gelöst zu werden. In meiner Arbeit soll mit exakten Methoden ein Lösungsweg gefunden werden und nicht wie sonst durch Ausprobieren. Damit dies allgemein geschehen kann, ist die Kenntnis von den möglichen Stellungen unerlässlich.

- Wie kann das Puzzle gelöst werden?
- Welche Kombinationen lassen sich erzeugen?
- Welche mathematische Darstellung eignet sich für das Puzzle?

Da im Voraus nicht viel über das Puzzle bekannt war, liessen sich noch keine genaueren Teilfragen finden.

1.3 Vorgehensweise

Zuerst erstellte ich das Programm zur Simulation des Puzzles. Anhand von Fachliteratur las ich mich dann in das Thema ein und wandte die gewonnen Kentnisse auf das Rätsel an. Neben den Büchern[2] die ich von Hr. Kamber erhalten habe, benutzte ich das Buch „Oval Track and other permutation Puzzles“, welches das Lösen von ähnlichen Problemen behandelt.

In meiner Arbeit möchte ich zuerst einen kurzen Überblick über das Rätsel geben. Danach wird das Nötigste an Theorie vermittelt. Schlussendlich werden die gewonnen Kentnisse auf das Puzzle angewandt; währendessen wird sich ein vollständiger Lösungsweg für das Puzzle herauskristallisieren.

[1] Siehe S.31.
[2] Siehe S.33: Elemente der Gruppentheorie und Kombinatorik.

2 Das Puzzle

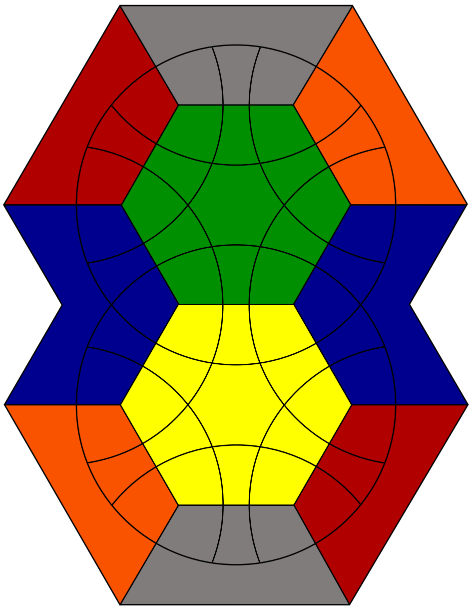


Abbildung 1: Das ganze Spielfeld

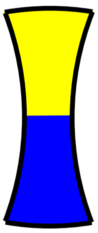


Abbildung 2: Ein Knochen

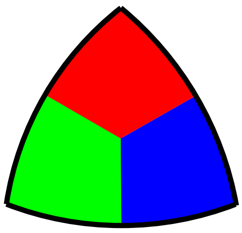


Abbildung 3: Ein Stein

Engel's Enigma besteht aus zwei ineinandergreifende Scheiben. Diese können jeweils um 60° verdreht werden. Das Spiel enthält zwei verschiedene Arten von Bausteinen: Knochen und Steine. Auf dem gesamten Spielfeld hat es 11 Knochen, welche aussehen wie zusammengequetschte Rechtecke. Sie besitzen zwei verschiedene Farben. Die Steine, welche aussehen wie zu dick geratene gleichseitige Dreiecke, haben jeweils an den Ecken eine andere Farbe. Ziel des Spiel ist es, alle Knochen und Steine an den richtigen Ort mit der richtigen Orientierung zu bringen. Dies ist vor allem bei den Steinen nicht selbstverständlich.

3 Das Programm

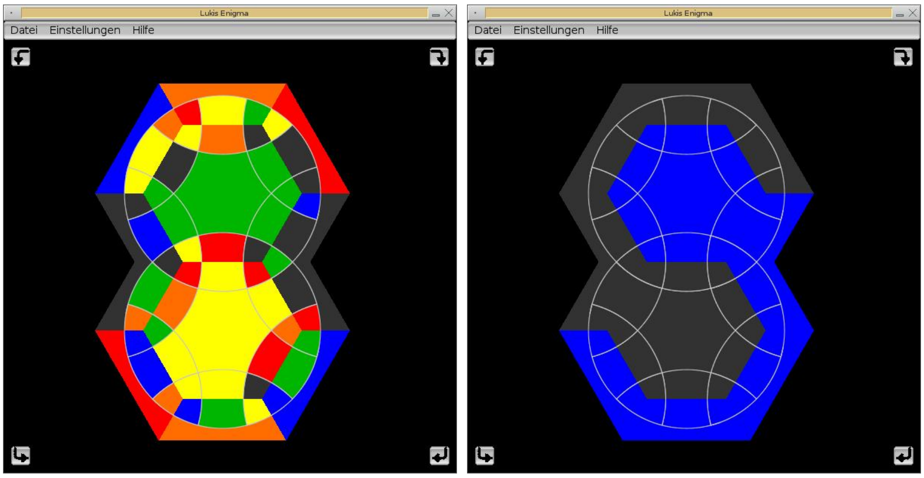


Abbildung 4: Das Programm im vermischten und gelösten Zustand

3.1 Ziel des Programmes

Das Programm sollte als Labor fungieren. Anhand der Spielerfahrung sollten erste Vermutungen über das Puzzle angestellt werden. In der zweiten Phase dient das Spiel für die Verifikation der Ergebnisse. Von dem Programm soll es sowohl eine Linux als auch eine Windows Version geben.

3.2 Funktionen

Das Spiel kann nicht nur Engel's Enigma simulieren, sondern auch vereinfachte Varianten, indem unterschiedliche Randfarben gleichgesetzt werden. Es speichert und liest Spielstände in Textdateien ab, welche auch von Hand bearbeitet werden können um bestimmte Spielsituationen zu erzeugen. Weiter sind Funktionen zum Mischen und Rücksetzen des Spielfeldes vorhanden. Zusätzlich werden auszuführende Züge automatisch von einer Datei eingelesen, der aktuelle Spielstand als Datei gespeichert und alle ausgeführten in eine andere geschrieben. Damit existiert eine Schnittstelle zu externen Programmen.

3.3 Bedienung

Das Spiel lässt sich komplett mit der Maus bedienen. Über die Menüpunkte kann man das Spielfeld in den gelösten Zustand setzen oder vermischen. Drehungen der Scheibe lassen sich zusätzlich mit den Tasten q, e, a und d bewerkstelligen.

4 Theoretische Grundlagen

4.1 Was ist eine Permutation?

Unter einer Permutation versteht man eine Neuanordnung von Elementen auf einer geordneten Liste. Eine Permutation ist also eine Vertauschungsregel von Elementen. Am Besten lässt sich dies anhand einiger Beispiele aufzeigen.

Beispiel 1. *Man betrachte die Permutation*

$$1 \to 1,\ 2 \to 3,\ 3 \to 2,\ 4 \to 4$$

Diese Permutation vertauscht in einer Anordnung den zweiten und dritten Platz. Die erste Spalte gibt die alte Position an, die zweite die neue Position. Die Elemente müssen keineswegs Zahlen sein, eine Permutation lässt sich auf alle geordneten Listen anwenden, zum Beispiel auch auf eine Folge von Symbolen oder, wie im Fall des Puzzles, auf die Knochen und Steine. Man kann die selbe Permutation in einer etwas vereinfachten Darstellung schreiben:

Beispiel 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Bedeutung ändert sich dadurch nicht. Es wird einfach das Element am Platz der oberen Zeile an den jeweiligen Platz der unteren Zeile gestellt. Bei dieser Darstellung lassen sich die Spalten frei vertauschen, das heisst, die oberste Zeile muss nicht unbedingt $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{pmatrix}$ sein. Eine weitere Schreibweise ist die sogenannte Zyklenschreibweise:

Beispiel 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

In der Zyklenschreibweise werden nur noch die Elemente erwähnt, welche den Platz wechseln. Bei dieser Schreibweise werden die Elemente innerhalb eines Klammernpaares zyklisch vertauscht. Solch ein Klammernpaar nennt man Zyklus. Es liest sich folgendermassen: Das Element vom zweiten Platz wandert auf den Dritten, während das Element des dritten Platzes auf den Zweiten kommt. Um diese Schreibweise komplett zu verstehen sind komplexere Beispiele notwendig.

Beispiel 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 8 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Diese Permutation hat, wie leicht zu erkennen ist, drei verschiedene Zyklen. $\begin{pmatrix} 5 & 8 \end{pmatrix}$ ist dem aus dem vorherigen Beispiel ähnlich. Das heisst, die Elemente der Plätze 5 und 8 tauschen ihre Positionen. Die zwei anderen Zyklen sind vergleichbar aufgebaut. Als nächstetes wird $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ genauer betrachtet. Hier wandert das erste Element auf den siebten Platz.

Das Element des siebten Platzes geht in die sechste Position über. Das Sechste geht nun wiederum auf den ersten Platz über. Damit ist dieser Zyklus geschlossen. Analog verhält es sich mit dem Zyklus $\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Eine Umwandlung in die Zyklenschreibweise ist bei jeder Permutation möglich und ist eindeutig[3]. Die Gleichheit zweier Permutationen in der Zyklenschreibweise ist gegeben, wenn die Elemente innerhalb eines Zyklus gleich oder zyklisch vertauscht sind ($\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\end{pmatrix}$).

4.2 Verknüpfen von Permutationen

Unter dem Verknüpfen von Permutationen versteht man schlicht das hintereinander ausführen zweier oder mehrerer Permutationen. Hat man die beiden zu kombinierenden Permutationen in der Matrizenschreibweise, so ist das nacheinanderausführen nicht besonders schwierig. Man sortiert die zweite Permutation so, dass die obere Zeile mit der unteren der ersten Permutation übereinstimmt. Danach setzt man einfach die erste Zeile der ersten Permutation und die zweite Zeile der zweiten Permutation zusammen und erhält die Kombination.

Beispiel 5.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 4 & 3 & 1\\2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

Ein Hinweis zur Schreibweise: In der Literatur werden die Permutationen manchmal von rechts zusammengefasst. Das heisst, zuerst wird die Permutation am rechten Ende ausgeführt, danach die links davon stehende. Ich halte mich in meiner Arbeit an das Buch „Oval Track and other permutation Puzzles“, bei welchem die Permutationen von Links zusammengefasst werden.

In der Zyklenschreibweise funktioniert es ähnlich. Man überlegt sich für das erste Element, an welchen Platz es wandert. Danach schaut man, was mit dem Element passiert, welches an dem Platz liegt auf welchem das erste gelandet ist.

Beispiel 6.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

Man beginnt mit dem ersten Element. Die erste Permutation bewirkt $1 \to 2$. Bei der zweiten Permutation schauen wir nun, worauf das 2. Element abgebildet wird: $2 \to 3$. Der Anfang des Ergebnisses muss also $\begin{pmatrix}1 & 3 & \ldots\end{pmatrix}$ sein. Nun beginnen wir von vorne und schauen was mit dem Element an Platz 3 geschieht, denn das erste ist auf dem dritten Platz gelandet. Die erste Permutation beeinflusst die Position nicht. Bei der zweiten wird es auf den fünften Platz transportiert. Also ist das nächste Element in der resultierenden Permutation 5. So fährt man weiter bis der erste Zyklus vollständig ist. Falls ein Zyklus nur ein Element enthält, kann er weggelassen werden, da er das Ergebnis nicht beeinflusst (das heisst, das Element wird auf sich selbst abgebildet).

[3] Elemente der Gruppentheorie, S.72.

4.3 Kommutativität

Zur Erinnerung: Eine Operation ist kommutativ wenn gilt:

$$a \circ b = b \circ a$$

Dies triff zum Beispiel auf die Addition oder Multiplikation zu, nicht aber auf die Subtraktion oder Division. Permutationen sind in der Regel nicht kommutativ, was sich einfach durch nachrechnen zeigen lässt:

Beispiel 7.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 2 & 4\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Eine Ausnahme bilden hier elementfremde Permutationen[4].

Beispiel 8.

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 9 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 9 & 6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

Weiterhin sind sie logischerweise vertauschbar, wenn die beiden Permutationen identisch sind.

4.4 Inverse Permutation

Wir verwenden bei Permutationen die aus der Algebra gewohnte Schreibweise von Potenzen:

$$\alpha \circ \alpha = \alpha^2$$

Die einfachste denkbare Permutation ist diejenige, die nichts verändert, also (). Diese Permutation nennt man Identität. Geschrieben wird sie oft mit einem kleinen e. Nun gilt das Interesse jenen Permutationen, welche auf α angewandt die Identität erzeugen. Also:

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = e$$

Wir nennen α^{-1} die *inverse Permutation* zu α. Wenn eine Permutation in Zyklenschreibweise gegeben ist, lässt sich daraus leicht die inverse Permutation ablesen, indem man einfach die Reihenfolge der Elemente vertauscht.

Beispiel 9.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}5 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

[4]Elemente der Gruppentheorie, S.74.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, wie es bei zusammengesetzten Permutationen aussieht. Ich lasse ab sofort das $\circ$ Zeichen zum Verknüpfen von Permutationen weg. Bei kombinierten Permutationen muss man einfach die einzelnen Elemente in der Reihenfolge umkehren und invertieren.[5]

Beispiel 10.

$$(\alpha\beta\beta\alpha\beta)^{-1} = \left(\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\right)$$

Weiterhin gilt für jede Permutation

$$e = \alpha^n \mid n \in \mathbb{N}^+$$

Dieses n entspricht bei einer einzykligen Permutation gerade der Gliederzahl. Bei mehrzykligen Permutationen ist es das kleinste gemeinsame Vielfache aller Gliederzahlen.

4.5 Zerlegen in Transpositionen

Eine Transposition ist eine spezielle Permutation, welche genau 2 Elemente vertauscht. Sie sind die einfachsten möglichen Permutationen, von der Identität abgesehen. Diese haben einige besondere Eigenschaften. Zum Beispiel ist $\alpha \circ \alpha = e$. Das ist recht einfach einzusehen, denn wenn zwei Elemente zweimal vertauscht werden, befindet man sich wieder in der Ausgangslage. Alle Transpositionen sind also zu sich selbst invers. Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen darstellen. Ich möchte hier nur kurz ein Beispiel aufzeigen und für den genauen Beweis in die Literatur verweisen[6]:

Beispiel 11.

$$\begin{pmatrix}5 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 9\end{pmatrix}$$

Eine Zerlegung in der Art wie sie hier aufgeführt ist, lässt sich mit jeder Permutation durchführen. Allerdings ist die Zerlegung nicht eindeutig.

Beispiel 12.

$$\begin{pmatrix}5 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix}$$

Es gibt also nicht eine richtige Lösung, sondern mehrere.

4.6 Parität

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, ist die Zerlegungn in Transpositionen nicht eindeutig. Trotzdem lassen sich Aussagen über die entstehenden Zerlegungen machen: Die Anzahl benötigter Transpositionen um eine Permutation darzustellen, ist entweder gerade oder ungerade. Ich möchte hier erneut nur kurz die Idee hinter dem Beweis vorstellen und für einen vollständigen Beweis auf die Literatur verweisen [7].

[5] Oval Track and other permutation Puzzles, S.75.
[6] Oval Track and other permutation Puzzles, S.85ff.
[7] Oval Track and other permutation Puzzles, S.94ff.

Es ist leicht einzusehen, dass e immer aus einer geraden Anzahl Transpositionen besteht, denn es gilt:

$$e = \alpha\alpha^{-1} = (\tau_1\tau_2 \ldots \tau_n)\,(\tau_n\tau_{n-1} \ldots \tau_1)$$

Wobei alle τ_j Transpositionen sind. Also besteht e aus einer geraden Anzahl Transpositionen. Nun wird eine Permutation beliebig in Transpositionen zerlegt:

$$\alpha = (\tau_1\tau_2 \ldots \tau_n)$$

Nun lassen sich möglicherweise Transpositionen kürzen (da $\tau_j\tau_j = e$) oder erweitern. Wenn erweitert wird muss die Summe der Permutationen e ergeben, denn sonst ändert sich die Ausgangspermutation α. Wenn wir e aus Transpositionen zussammensetzen wollen, brauchen wir stets eine gerade Anzahl Transpositionen.

Wir können also mit Transpositionen erweitern oder kürzen. Solange sich α nicht verändert, müssen wir immer eine gerade Anzahl von Permutation hinzufügen oder entfernen. Daraus folgt, dass eine Permutation, welche in eine gerade Anzahl Transpositionen zerlegt werden kann, nie aus einer ungeraden Anzahl Transpositionen bestehen kann. Solche Permutation nennt man gerade Permutationen. Analog verhält es sich bei den ungeraden Permutationen.

Ein Zyklus mit n Glieder lässt sich in $n-1$ Transpositionen zerlegen [8]. Das heisst, eine Permutation ist gerade, wenn sie in der Zyklenschreibweise aus einer ungeraden Anzahl Glieder dargestellt werden kann. Beispielsweise $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}5 & 7 & 11 & 16 & 1\end{pmatrix}$. Besonders wichtig ist, dass e eine gerade Permutation ist. $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 11 & 8 & 5\end{pmatrix}$ sind Beispiele für ungerade Permutationen. Zu jeder geraden Permutation ist die inverse Permutation ebenfalls gerade, denn um die inverse Permutation aufzubauen führt man einfach die Transpositionen in der umgekehrten Reihenfolge aus. Dadurch ändert sich an der Anzahl Transpositionen und damit auch an dem Vorzeichen nichts. Das selbe gilt auch für die ungeraden.

Für die nächsten Kapitel ist vor allem wichtig, was mit der Parität passiert wenn man Permutationen addiert. Es gelten dabei ähnliche Regeln wie beim Rechnen mit natürlichen Zahlen. Addiert man zwei gerade Zahlen, so entsteht wieder eine gerade Zahl. Analog verhält es sich beim Verknüpfen von Permutationen: Gerade Permutationen verknüpft ergeben wieder gerade Permutationen. Bei der Kombination einer geraden und einer ungeraden Permutation entsteht eine ungerade Permutation. Im Falle von zwei ungeraden entsteht wiederum eine gerade. Der Beweis dieser Aussage ist ähnlich dem vorhergehenden: Es läuft darauf hinaus, dass die Transpositionen aneinander gefügt werden und sie nur paarweise wegfallen können[9].

[8] Siehe S.9, oder vollständig in Elemente der Gruppentheorie, S.81.

[9] Vollständiger Beweis: Oval Track and other permutation Puzzles, S.103.

4.7 Konjugierte Permutationen

Zwei Permutationen β and γ nennt man konjugiert, wenn eine Permutation φ existiert, so dass gilt:

$$\varphi\beta\varphi^{-1} = \gamma$$

Konjugierte Permutationen haben die gleiche Zyklenstruktur. Wenn also β aus einem dreigliedrigen und einem zweigliedrigen Zyklus besteht, so besteht auch γ aus einem dreigliedrigen und einem zweigliedrigen Zyklus [10]. Wenn φ und β kommutieren, dann ist $\beta = \gamma$. Diese Kombinationen sind sehr wichtig um später das Puzzle lösen zu können.

Beispiel 13.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$$

Wir können mithilfe dieses Konstrukts Permutationen gewissermassen an andere Orte verschieben.

4.8 Gerade Permutationen aus Dreierzyklen erzeugen

Aus Transpositionen lassen sich sämtliche Permutationen bilden, darunter befinden sich selbstverständlich auch die geraden. Wenn wir aber gerade und nur gerade Permutationen wollen, dann stellt sich die Frage, ob es nicht eine bessere „Basispermutation“gibt, welche selbst gerade ist. Solch ein Element findet sich in der einfachsten geraden Permutation (abgesehen von der Identität). Dies sind Permutationen die aus einem Zyklus mit drei Glieder bestehen.

Beispiel 14.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Mit dreigliedrigen Zyklen lassen sich alle geraden Permutationen erzeugen[11]. Die Vorgehensweise ist dabei nicht sonderlich schwierig. Man positioniert mit den Dreierzyklen ein Element nach dem anderen an den richtigen Ort. Etwas geschickter ist es, mit jedem Dreierzyklus gleich zwei Elemente Richtig zu positionieren, was aber nicht immer möglich ist.

Beispiel 15. *Wie kann man die folgende Permutation aus Dreierzyklen aufbauen?*

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix}$$

Zuerst bewegt man mit $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ *die ersten zwei Elemente an den richtigen Platz. Das dritte Element ist jetz auf den ersten Platz gerutscht, deshalb muss der zweite Zyklus mit 1 beginnen.*

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix}$$

[10] Oval Track and other permutation Puzzles, S.113.
[11] Oval Track and other permutation Puzzles, S.105.

Nun wird nochmals der selbe Trick wie vorher angewendet.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die jetzt entstandene Permutation kann nicht direkt gelöst werden. Wir stellen zuerst das erste Element des Zweierzyklus an die richtige Stelle. Also muss die Permutation mit $\begin{pmatrix}1 & 6 & \ldots\end{pmatrix}$ *beginnen. Für das noch freistehende Element im Zyklus wählen wir ein beliebiges aus den noch zu verschiebenden Elementen. Übrig bleibt ein Dreierzyklus.*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 8 & 7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

5 Anwendung auf das Puzzle

5.1 Allgemeines Vorgehen

Ähnlich wie bei anderen Permutationspuzzles, zum Beispiel beim Rubiks Cube, hat es sich als sinnvoll erwiesen, das Spiel in kleinere Teilaufgaben aufzuteilen. In einem ersten Schritt positioniert man also zuerst alle Knochen, danach kümmert man sich um die Position der Steine und schlussendlich noch um die richtige Orientierung derjenigen. Dies ist dabei sicherlich nicht der schnellste, im Sinne von möglichst wenigen Verdrehungen, Weg, jedoch ist er für Mensch und Maschine besser anwendbar.

5.2 Darstellung des Spielfeldes

Entsprechend der Aufteilung in kleinere Teilprobleme, ist es auch sinnvoll für jedes Problem eine angepasste Darstellung zu verwenden.

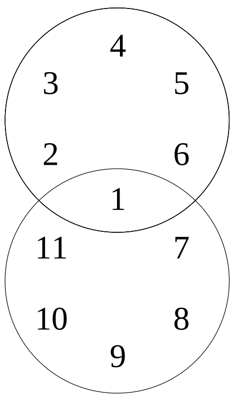


Abbildung 5: Das Feld der Knochen

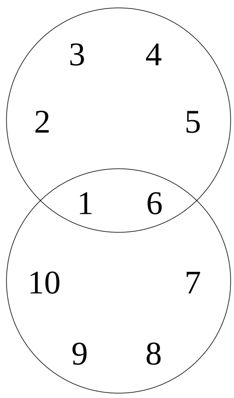


Abbildung 6: Das Positionsfeld der Steine

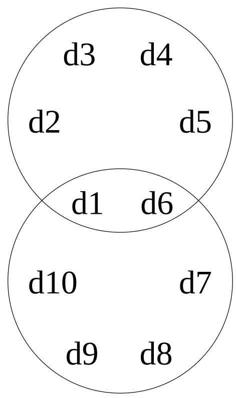


Abbildung 7: Das Drehfeld der Steine

Das Letzte Feld ist speziell, da wir hier nicht einfach mit Positionsangaben arbeiten, sondern jeder Stelle eine Zahl zuordnen. Wie dies genau funktioniert, wird im Kapitel „Drehen der Steine"erklärt. Die Kurzzeichen verwende ich ab jetzt in meiner Arbeit, um allgemeine Verdrehungskombinationen darzustellen. Die α Zeichen beziehen sich jeweils auf eine Permutation auf dem Feld der Knochen, die β stehen für Veränderungen auf dem Steinfeld. Für die ersten 2 Felder lassen sich leicht die Permutationen angeben:

Verdrehung	Zeichen	Permutation Knochen	Permutation Steine
Oben, Uhrzeigersinn	O	$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$	$\beta_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$
Oben, Gegenuhrzeigersinn	o	$\alpha_1^{-1} = \begin{pmatrix}6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	$\beta_1^{-1} = \begin{pmatrix}6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$
Unten, Uhrzeigersinn	U	$\alpha_2 = \begin{pmatrix}1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\end{pmatrix}$	$\beta_2 = \begin{pmatrix}1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\end{pmatrix}$
Unten, Gegenuhrzeigersinn	u	$\alpha_2^{-1} = \begin{pmatrix}11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 1\end{pmatrix}$	$\beta_2^{-1} = \begin{pmatrix}10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 1\end{pmatrix}$

Es ist zu beachten, dass die beiden Verdrehungen O und o auf beiden Felder zueinander invers sind. Dies ist leicht einzusehen, denn wenn man eine Scheibe einmal im Uhrzeigersinn und danach im Gegenuhrzeigersinn (oder umgekehrt) dreht, erhält man wieder die Ausgangsposition. Ebenso U und u.

5.3 Positionieren der Knochen

5.3.1 1. Scheibe

Die Knochen auf der ersten Scheibe zu positionieren ist nicht sonderlich schwierig, da wir keine Rücksicht auf bereits richtig positioniertes zu nehmen brauchen. Glücklicherweise muss auch keine Rücksicht auf die richtige Orientierung der Knochen genommen werden, da es keine Möglichkeit gibt, einen Knochen an Ort zu drehen. Befindet sich der Knochen am richtigen Ort, so ist er auch richtig verdreht. Wir lassen die Steine sowie die Knochen der zweiten Scheibe ausser Acht. Nun drehen wir einfach einen Knochen in die richtige Position und beginnen Nachbar um Nachbar zu positionieren. Mit welcher Scheibe wir beginnen, ist unwichtig, aber ich halte mich daran, jeweils zuerst die untere Scheibe zu lösen. Folgende Situation lässt sich leicht erzeugen:

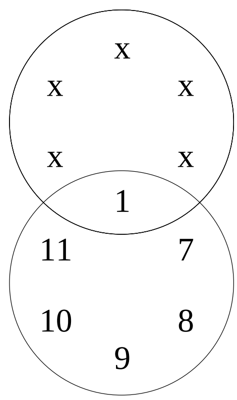


Abbildung 8: Die erste Scheibe gelöst

5.3.2 Auf der Suche nach einer geeigneten Kombination

Während man beim ersten Schritt noch mehr oder weniger wahllos drehen konnte um das gewünschte Resultat zu erzielen, wird es nun etwas schwieriger: Denn wenn einfach wieder mit derselben Methode vorgeht, zerstört man die bereits gelösten Positionen. Es bedarf also einer Permutation, welche nur eine Scheibe betrifft. Am besten geeignet wäre natürlich eine Transposition, also eine Permutation, welche nur 2 Elemente vertauscht. Damit liesse sich jede Permutation erzeugen und die zweite Scheibe wäre ebenfalls zu lösen. Die Frage ist nun, wie eine solche Zugkombination zu finden ist. Ohne weiteres ist nicht ersichtlich, wie eine solche Kombination aufgebaut sein könnte. Ich erhoffte mir ein Schema zu erkennen, wenn ich zuerst eine vereinfachte Version löse. Da mir ein Puzzle mit nur zwei Elementen pro Scheibe zu weit vom eigentlichen Problem entfernt schien, versuchte ich mein Glück mit einer Version, die drei Elemente pro Scheibe beinhaltet. Jedoch ist es mir auch hier nicht gelungen, eine Transposition zu erzeugen. Das einzige transpositionsartige Ergebnis war folgende Kombination:

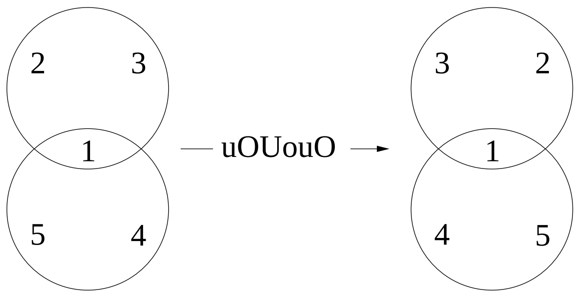


Abbildung 9: Beinahe Transposition auf dem 3er Feld

Im Nachhinein betrachtet ist es natürlich klar, dass sich auf diesem Feld keine Transpositionen erzeugen lassen, denn beide möglichen Permutationen $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\end{pmatrix}$ sind gerade. Alle Kombinationen aus geraden Permutation sind wiederum gerade. Also gibt es auf diesem Feld keine Transpositionen. Aber auf dem echten Enigmafeld gibt es Transpositionen, da α_1 und α_2 ungerade sind[12]. Um trotzdem eine Kombination mit dem gewünschten Ergebnis zu erhalten habe ich mich gewissermassen der Holzhammermethode bedient: Ausprobieren. Von Hand wäre dies zu einer langwierigen Sache geworden, aber da das Puzzle sowieso schon in digitaler Form existierte, lag die Möglichkeit nahe, den Computer ausprobieren zu lassen. Die Ausgabe des Programmes findet sich im Anhang auf Seite 35. Eigentlich hat jede dieser Kombinationen denselben Effekt, nämlich die Knochen auf den Positionen zwei und drei auszutauschen ohne die anderen Knochen zu bewegen. Der Einfachheit wegen wählte ich die kürzeste Kombination:

$$uOUOuOUOuOOUO = \gamma = \alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_1 = \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}_{Knochen}$$

Mit dieser Kombination lässt sich nun die zweite Scheibe angehen.

[12] Um genau zu sein, lassen sich nicht immer aus beliebigen ungeraden Permutationen Transpositionen bilden. Dies ist aber hier der Fall, siehe S.34.

5.3.3 2. Scheibe

Mit der gefundenen Kombination ist es nun nicht mehr schwierig, die zweite Scheibe ebenfalls zu lösen. Mit Hilfe von Konjugaten lassen sich nun alle beliebige Transpositionen erstellen. Aus diesen wiederum kann jede beliebige Permutation aufgebaut werden. Eine beliebige Permutation lässt sich erzeugen, indem man die beiden auszutauschenden Knochen an die Positionen 2 und 3 stellt (entspricht φ), die vorher gefundene Kombination ausführt (γ) und schliesslich wieder die Züge rückgängig macht (φ^{-1}), die man zum Positionieren verwendet hat. Dabei ist es vollkommen egal, wie umständlich man vorgeht beim Positionieren, man muss nur alles wieder rückgängig machen. Unter rückgängig machen versteht man hier die inverse Permutation anwenden, bei Permutationen die aus anderen zusammengesetzt sind, muss man die Reihenfolge umkehren und jedes einzelne Glied invertieren[13]. Herauszufinden, welche Knochen man nun austauschen muss, ist einfach. Man wählt einen beliebigen falsch positionierten und sucht seine richtige Position. Wenn nun diese beiden Knochen ausgetauscht werden, ist mindestens einer mehr richtig positioniert als vorher. Am Schluss sind noch zwei nicht richtig positionierte Knochen übrig, welche man auch noch durch austauschen in die richtige Position überführen kann.

Beispiel 16. *Wir wollen die Knochen 3 und 8 austauschen. Dazu müssen wir die beiden Knochen in Position 2 und 3 bringen:*

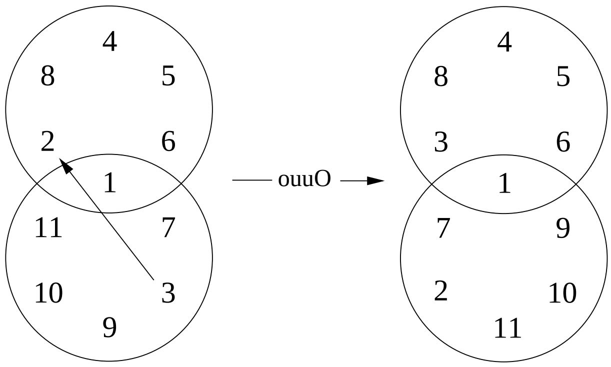


Abbildung 10: Knochen 3 und 8 in Austauschposition bringen.

[13]Siehe S.9.

Nun tauschen wir die Knochen aus.

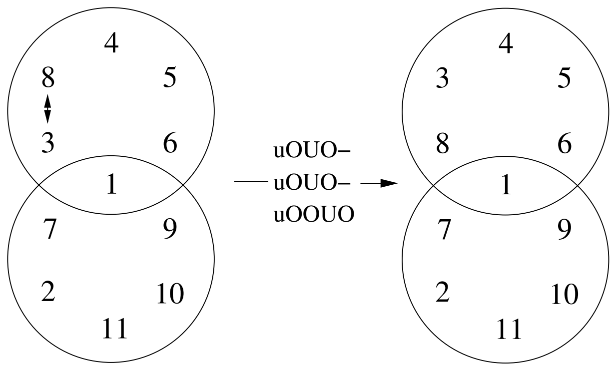


Abbildung 11: Die Knochen austauschen.

Und zum Schluss machen wir die Positionierungsbewegungen Rückgängig:

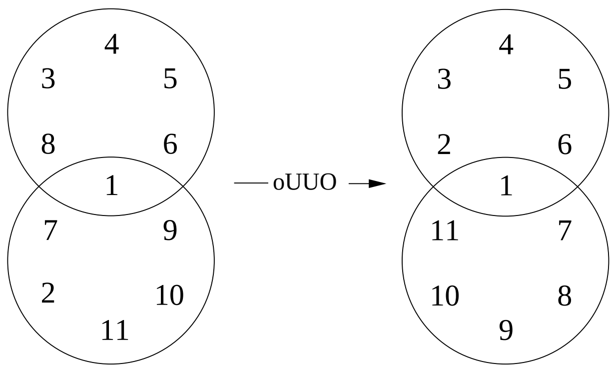


Abbildung 12: Rückgängigmachen der Positionierung.

5.4 Positionieren der Steine

Im Prinzip gilt es, wieder das selbe Problem zu lösen wie beim Positionieren der Knochen auf der zweiten Scheibe. Wir brauchen eine möglichst einfache Permutation, aus der wir die anderen, komplexeren, aufbauen können. Laut Maple[14] ist es durchaus möglich aus den Permutationen β_1 und β_2 eine Transposition aufzubauen[15]. Bei dieser Kombination muss aber darauf geachtet werden, dass nicht die bereits richtig positionierten Steine wieder vermischt werden. Ähnlich wie im ersten Teil, bei dem die Steine ausser Acht gelassen werden, lässt man nun die Verdrehung der Steine weg.

Ich hätte nun mein Ausprobierprogramm so umschreiben können, dass einfach beide Bedingungen erfüllt sein müssen: Die Steine müssen ihre Postion behalten und auf dem

[14]Ein Computerprogramm für Mathematik.
[15]Siehe S.34.

Steinfeld muss eine Transposition entstehen. Allerdings erwartete ich bei diesem Vorgehen keine Resultate, da eine solche Kombination, so vermutete ich, aus wesentlich mehr Verdrehungen besteht als die bisher gesuchten. Denn nun sind deutlich mehr Bedingungen zu erfüllen und die Kapazitäten meines Programmes (beziehungsweise meines Computers) sind begrenzt. So entschied ich mich, das Problem weiter aufzuteilen. In einem ersten Schritt wollte ich nur blind nach Kombinationen suchen, die zwar irgendetwas verändern, trotzdem aber die Knochen nicht bewegen. Wiederum erhielt ich eine ziemlich lange Liste von Kombinationen[16]. Diese Verdrehungen müssen nicht zwangshaft eine Bewegung auf dem Steinfeld verursachen. Allerdings zeigt sich nach dem Ausrechnen, dass alle Kombinationen eine Veränderung auf dem Steinfeld hervorrufen.

5.4.1 Eigenschaften der Steinpermutationen

Bei diesen Kombinationen fallen gewisse Eigenschaften auf: Sie bestehen alle aus einer geraden Anzahl Verdrehungen. Bei genauerer Betrachtung sind keine anderen möglich, denn sie müssen auf dem Knochenfeld e erzeugen. α_1 und α_2 sind aber beide ungerade Permutationen, und es benötigt stets eine gerade Anzahl ungerader Permutationen um eine gerade zu bilden (wie e eine ist).

Dies hat natürlich Konsequenzen für die Permutationen die sich auf dem Steinfeld erzeugen lassen. Wenn das Puzzle gelöst ist, dann herrscht sowohl auf dem Stein- als auch auf dem Knochenfeld e, also sind beide Felder gerade. Wird nun eine Scheibe verdreht, so ändern sich jeweils beide Paritäten, denn β_1 und β_2 sind ebenfalls ungerade. Somit ist die Parität der beiden Felder immer gleich. Nun erstellen wir auf beliebige Weise e auf dem Knochenfeld, da e gerade ist, muss auch auf dem Steinfeld eine gerade Permutation entstanden sein. Um nun das Steinfeld nach e zu überführen, muss die inverse Permutation angewendet werden, welche logischerweise auch wieder gerade ist[17].

Daraus folgt weiterhin, dass es nicht lösbare Stellungen von dem Puzzle gibt. Selbstverständlich lassen sich diese nicht durch Verdrehen erreichen. Aber wenn man unerlaubt zwei Steine heraustrennt und deren Position vertauscht, so ist das Puzzle nicht mehr lösbar. Denn dann wechselt die Parität nur auf einer Scheibe. Bringt man nun durch Verdrehen ein Feld mit den Randfarben in Übereinstummung, so entsteht auf dem anderen eine ungerade Permutation, also sind dort die Elemente nicht korrekt positioniert. Das Puzzle wird erst wieder lösbar, wenn man erneut durch einen unerlaubten Trick die Paritäten wieder synchronisiert. Das heisst, entweder zwei Steine oder zwei Knochen austauschen[18].

5.4.2 Basispermutation finden

Mit diesem Wissen kann man sich daran machen, eine möglichst einfache Steinpermutation zu finden, welche die Knochen nicht bewegt. Wie im vorhergehenden Kapitel erwähnt, muss dies eine gerade Permutation sein, also fallen die Transpositionen weg. Es bleiben die

[16] Siehe S.36.

[17] Siehe S.10.

[18] Anstatt Austauschen sind auch beliebige andere ungerade Permutationen möglich.

dreizyklischen Permutationen, aus welchen sich alle weiteren geraden aufbauen lassen. Um diese nun zu finden, schaut man, welche Permutationen die gefundenen Kombinationen auf dem Steinfeld verursachen. Diese lassen sich nun beliebig kombinieren. Da jedes einzelne Element die Knochen an ihrer Position belässt, gilt dies auch für ihre Summe. Nun wählte ich zwei Kombinationen von der Liste aus. Es eignen sich nicht alle Permutationen gleich gut, denn nicht aus allen lassen sich Dreierzyklen erzeugen. Maple half mir dabei herauszufinden, welche Permutationen geeignet sind[19]. Als grundlegende Permutationen wählte ich:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= UUUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUUU\\ &= \beta_2\beta_2\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_2\beta_2\\ &= \big(\begin{pmatrix}7 & 8 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 9 & 10 & 6 & 2\end{pmatrix}\big)_{Stein}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= UUOUOUOUUOUOUOUOUOUUOUOUUUUU\\ &= \beta_2\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_2\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2\beta_2\beta_2\beta_2\beta_2\\ &= \big(\begin{pmatrix}8 & 2 & 10 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6 & 7 & 9 & 3\end{pmatrix}\big)_{Stein}\end{aligned}$$

Diese lies ich nun in meinem Ausprobierprogramm kombinieren, um einen Dreierzyklus zu finden. Das Programm ist eigentlich identisch mit den ersten beiden Ausprobierprogrammen, nur sind die Basispermutationen und die Ausgangslage verändert. Aus der Ausgabe des Programmes wählt man nun wiederum eine beliebige Kombination aus λ_1 und λ_2 aus.

$$\delta = \lambda_2\lambda_1\lambda_1\lambda_1\lambda_2\lambda_2\lambda_2\lambda_1\lambda_1\lambda_2\lambda_1\lambda_1\lambda_2\lambda_2\lambda_1\lambda_1\lambda_1\lambda_2\lambda_1\lambda_1\lambda_1\lambda_1 = \begin{pmatrix}8 & 7 & 6\end{pmatrix}_{Stein}$$

Hier setzt man nun die ursprünglichen Zugfolgen ein um schlussendlich eine vollständige Verdrehungskombination zu erhalten. Die folgende Kombination wurde bereits so weit wie möglich vereinfacht:

$$\begin{aligned}&UUOUOUOUUOUOUOUOUUOUOUUOUOUOUOUOOUOUOU\\ &OUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOUOU\\ &OUOUOUOuOUOUOUUOUOUOUOUOUUOUOUOUOUOUUOUOUO\\ &UOUOUUOUOUOUOUOUUOUOUOUOUOUUOUOUUOUOUOUOUO\\ &UOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOuOUOUOU\\ &UOUOUOUOUOUUOUOUUOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOUO\\ &UOUOUOUOOUOUOUOUOUOuOUOUOUUOUOUOUOUOUUOUOU\\ &OUOUOUUOUOUOUOUOUUOUOUUOUOUOUOUOUOOUOUOUOU\\ &OUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOU\\ &OUOUOuOUOUOUUOUOUOUOUOUUOUOUUOUOUOUOUOUOOU\\ &OUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUO\\ &OUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOUUU\end{aligned}$$

[19] Siehe S.37.

Mit dieser Kombination kann man nun wie beim Positionieren der Knochen alle Dreierzyklen mit Hilfe von konjugierten Permutationen erzeugen. Man stellt die zu bewegenden Steine an die Position 6, 7 und 8, führt die oben genannte Kombination aus und macht die Positionierungsbewegung wieder Rückgängig:

$$\alpha\delta\alpha^{-1}$$

Bei der Positionierung der Steine (α) muss man keine Rücksicht auf die Knochen nehmen. Denn dort verändert δ nichts. α_K beschreibt die Permutatione die beim Positionieren auf dem Knochenfeld entsteht.

$$\alpha_K\delta_K\alpha_K^{-1} = \alpha_K e \alpha_K^{-1} = \alpha_K\alpha_K^{-1} = e$$

Das Aufbauen beliebiger Permutationen aus Dreierzyklen ist einfach (siehe S.11). Damit kann man die Steine richtig positionieren, nun müssen sie nur noch richtig verdreht werden.

Beispiel 17. *Um die Steine 3, 7 und 9 richtig zu Positionieren muss man sie in Position 8,6 und 3 bringen. Man beachte, dass die Positionierung auf 3, 6 und 8 in der richtigen Reihenfolge geschehen muss.*

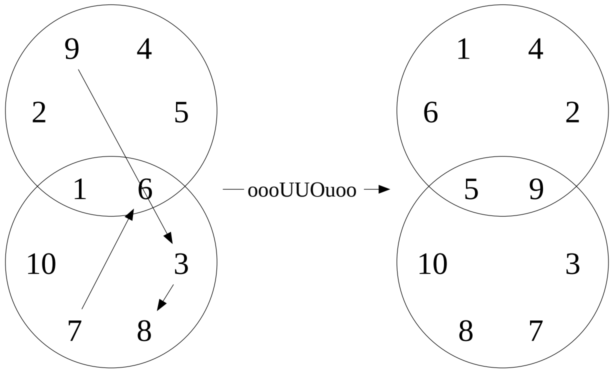


Abbildung 13: Steine 3, 7 und 9 in Austauschposition bringen.

Nun werden die Steine ausgetauscht

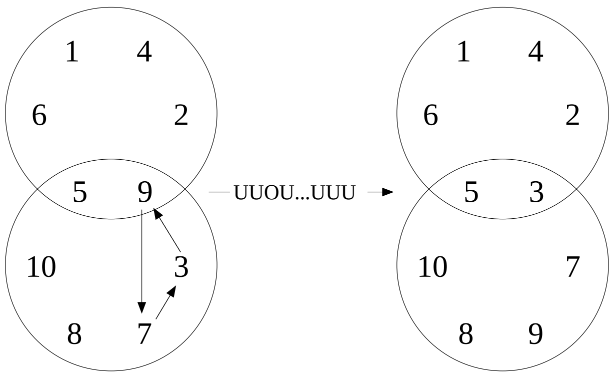


Abbildung 14: Die Steine austauschen.

Und zum Schluss wird die Positionierungsbewegungen Rückgängig gemacht.

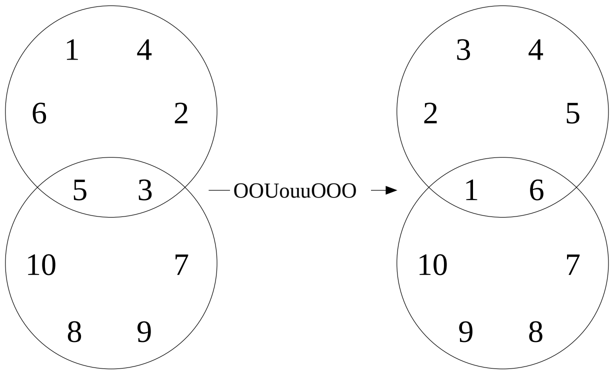


Abbildung 15: Rückgängig machen der Positionierung.

5.5 Drehen der Steine

Insgeheim erhoffte ich mir, dass mit dem Positionieren der Steine und Knochen das Puzzle gelöst sei. Aber ein Versuch im Simulationsprogramm bewies mir das Gegenteil. Um nun die Verdrehung der Steine genauer zu untersuchen, muss diese zuerst genau definiert werden:

Definition. *Die Verdrehung eines Steines entspricht der Anzahl benötigter 120° Verdrehungen im Uhrzeigersinn bis die Ecke mit der Farbe der Mittelscheibe in Richtung Scheibenmitte zeigt. Falls ein Stein beide Scheibenfarben besitzt oder nicht klar ist, zu welcher Scheibe er gehört, wähle man die Farbe der oberen Scheibe beziehungsweise man ordne ihn der oberen Scheibe zu.*

Diese Definition habe ich gewissermassen schon verwendet, als ich das Simulationsprogramm geschrieben habe. Zudem hat sie sich als sinnvoll erwiesen. Praktisch daran ist, dass sie immer funktioniert, unabhängig davon, ob sich der Stein nun an seinem richtigen Platz befindet oder nicht. Zu erwähnen ist noch, dass nur Verdrehungszahlen von null bis zwei möglich sind. Eine drei würde eine vollständige Umdrehung bedeuten, was gleichgültig mit keiner Verdrehung, also null, ist.

Beispiel 18. *Welches Verdrehfeld erzeugt folgende Situation? Man beachte besonders die Steine in den sich überschneidenden Bereichen.*

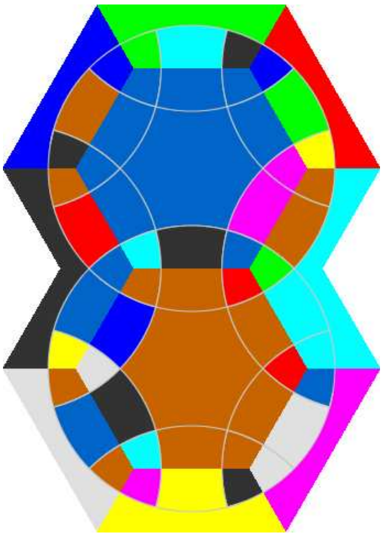


Abbildung 16: Situation

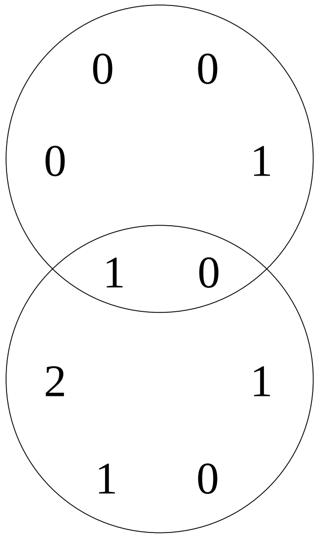


Abbildung 17: Verdrehfeld

5.5.1 Mögliche Verdrehungen

Ähnlich wie im vorhergehenden Kapitel betrachten wir die Situation im gelösten Zustand. Dann hat jeder Stein die Verdrehungszahl 0. Wenn wir nun eine Scheibe verdrehen, dann werden die Verdrehungszahlen zyklisch vertauscht. Zusätzlich dazu wird noch im Bereich in dem sich die Scheiben überschneiden die Verdrehungszahl verändert. Genauer gesagt, sie verändern sich, wenn die untere Scheibe gedreht wird. Folgende Grafiken geben an, was *nach* der zyklischen Vertauschung mit den Verdrehzahlen passiert:

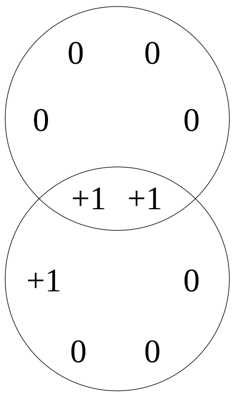


Abbildung 18: Drehung unten, im Gegenuhrzeigersinn

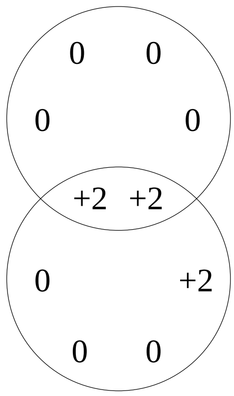


Abbildung 19: Drehung unten, im Uhrzeigersinn

Auffällig daran ist, dass sich die Summe der Verdrehzahlen immer als Vielfaches von drei darstellen lässt. Eine Verdrehung um drei ist das selbe wie gar keine Verdrehung. Folglich bleibt die Summe der Verdrehzahlen immer null. Das heisst konkret für das Puzzle: Es ist nicht möglich, nur einen Stein zu drehen. Es müssen mindestens zwei Steine verdreht werden, und zwar so, dass ihre Verdrehungssumme drei ergibt. Bei zwei Steinen gibt es nur eine Möglichkeit, einen Stein einmal drehen und den anderen zweimal. Bei drei Steinen können alle Steine einmal oder zweimal verdreht werden.

Dies hat Folgen für die Lösbarkeit einer Situation. Wenn man einen Stein unerlaubt dreht, so ist die Summe aller Verdrehungen nicht mehr null und das Puzzle nicht mehr durch Verdrehen lösbar.

5.5.2 Eine einfache Verdrehungskombination

Um nun alle beliebigen Verdrehungen zu lösen, benötigt man eine Kombination, welche die Knochen und Steine an ihrer Position belassen und ausschliesslich die Verdrehung beeinflusst. Nur einen Stein zu verdrehen ist nicht möglich, also suchte ich nach einer Kombination, welche mir drei Steine je einmal verdreht. Man kann auch eine suchen, bei der zwei Steine verdreht werden. Allerdings halte ich es für einfacher, aus einer Kombination welche drei Steine verändert, kompliziertere Verdrehungen aufzubauen. Prinzipiell wäre dies aber auch möglich aus einer, welche nur zwei Steine betrifft. Nun ist die Vorgehensweise wieder die selbe. Kombinationen, welche die Knochen in Ruhe lassen und drei Steine zyklisch vertauschen, habe ich bereits gefunden. Wenn man nun drei dieser Kombinationen hintereinander ausführt, so erhält man eine, die weder Knochen noch Steine bewegt. Glücklicherweise kam ich um das langwierige Ausprobieren herum, denn die gefundene Kombination um drei Steine zu bewegen, verändert nur sehr wenig an der Rotation der Steine. Wenn man die Kombination dreimal hintereinander ausführt, befinden sich die Steine alle wieder am selben Ort. Auch an der Verdrehung hat sich beinahe nichts verändert, ausser dass die Steine, welche vorher den Platz gewechselt haben nun alle um +1 verdreht wurden. Damit ist auch die Verdrehung der Steine lösbar und damit das letzte Puzzleteil gefunden. Dieser Makrozug verändert also nichts, ausser die Verdrehung der Steine 6, 7 und 8.

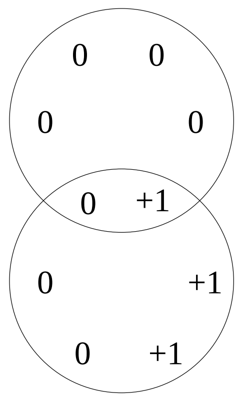


Abbildung 20: Effekt der Verdrehkombination auf dem Drehfeld

Beliebige Steine zu verdrehen funktioniert genau gleich wie bei den anderen Operationen bisher. Man positioniert die Steine an den Positionen 6, 7 und 8. Führt δ (die Kombination von S.19) dreimal hintereinander aus und macht die Positionierungsbewegung rückgängig. Die einzige Situation, die es noch speziell zu beachten gilt, ist der Fall, in dem nur zwei Steine verdreht sind. Dann muss man in einem ersten Schritt den doppelt verdrehten zusammen mit zwei bereits richtig gedrehten Steinen zusammen so verdrehen, dass der doppelt verdrehte richtig zu liegen kommt. Man transportiert damit quasi die zweifache Verdrehung des Steines auf zwei nicht verdrehte Steine. Damit ist man wieder bei einer bekannten Situation angelangt: Drei Steine die jeweils einmal verdreht sind.

Beispiel 19. *Folgende Situation lässt sich nicht direkt lösen. Man muss zuerst die doppelte Verdrehung auf zwei nicht verdrehte umlagern. Der Zug der angewendet wird ist dreimal die Kombination von Seite 19 (δ^3).*

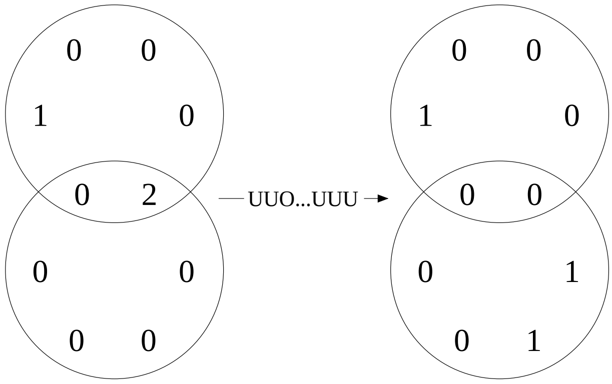


Abbildung 21: Verdrehung lösen, wenn nur zwei Steine verdreht sind

Die enstandene Situation lässt sich nun leicht lösen: Zuerst muss man mit oo die drei Steine in Position bringen, danach muss man δ^3 zweimal anwenden, denn es muss ja 2 addiert werden[20]*. Schlussendlich wird die Positionierungsbewegung rückgängig gemacht: OO. Das Rückgängig machen ist zwar aus Sicht des Drehfeldes nicht nötig, aber die Knochen und Steine müssen wieder an ihren Ursprungsort zurück.*

5.6 Lösbarkeit

Inzwischen sind einige Fälle aufgetreten, die zwar rein mechanisch denkbar sind, sich aber nicht durch Verdrehen erzeugen lassen. Folgende Operationen lassen sich *nicht* durch Verdrehen erzeugen:

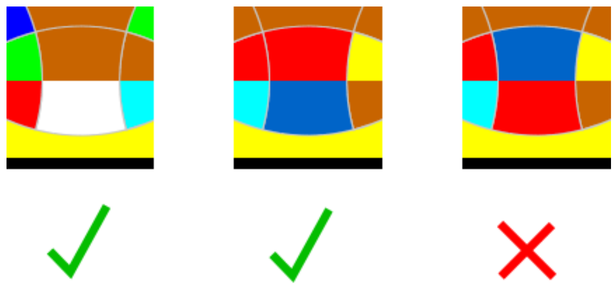
- Einen Knochen an Ort verdrehen.
- Zwei Steine vertauschen ohne auch zwei Knochen zu vertauschen.

[20] Als alternative, zugsparende Version kann man auch einmal δ^{-3} anwenden

- Einen einzelnen Stein ein oder zweimal verdrehen.

Falls nichts von dem angewendet wurde, ist das Puzzle durch Verdrehen lösbar. Dies lässt sich relativ leicht überprüfen, auch auf einem gemischten Feld. Bei den Knochen achtet man darauf, ob alle ihre Scheibenmittelfarben dem Zentrum zugewandt haben, falls sie auf der richtigen Scheibe sitzen. Ansonsten muss die Farbe davon abgewandt sein.

Beispiel 20. *Die Randfarben sind braun und blau. Welche Steine sind in Ordnung?*



Für die Position der Steine stellt man zuerst die Permutationen auf, welche alle Knochen und Steine in Deckung bringt. Haben beide das gleiche Vorzeichen, so ist das Puzzle lösbar. Bei der Verdrehung der Steine muss man einfach alle Drehzahlen bestimmen und ihre Summe auf Null überprüfen.

Betrachten wir die Anzahl aller mechanisch möglichen Kombinationen:

$$11! \cdot 10! \cdot 2^{11} \cdot 3^{10} = 17.517.061.326.168.391.680.000$$

Mit 11! erhalten wir alle möglichen Positionen der Knochen (11 Elemente auf 11 Plätze positionieren). Mit 10! alle möglichen Positionen der Steine. 2^{11} gibt die Verdrehung der Knochen an, 3^{10} die der Steine. Von dieser Zahl kommt man nun leicht auf die Anzahl durch Verdrehen erzeugbarer Kombinationen.

$$\frac{11! \cdot 10! \cdot 2^{11} \cdot 3^{10}}{2^{11} \cdot 3 \cdot 2} = 1.425.542.100.111.360.000$$

Der Teiler setzt sich wie folgt zusammen:

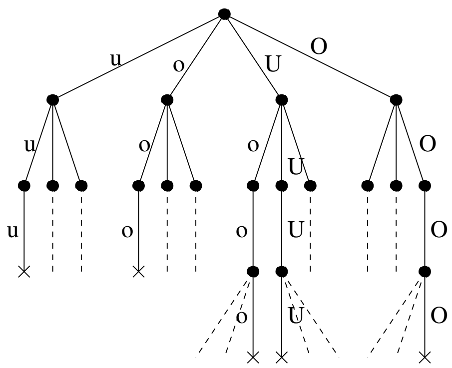
- Nur *eine* Verdrehung der Knochen lässt sich lösen (Divisor 2^{11}).
- Nur in jedem zweiten Fall ist besitzen Knochen und Steinfeld die gleiche Parität (Divisor 2).
- Von allen drei möglichen Steinverdrehungssummen ist nur eine lösbar (Divisor 3).

Dies liegt in der selben Grössenordnung wie Rubik's Cube, welcher mit 43.252.003.274.489.856.000 etwa dreissig mal mehr mögliche Stellungen hat[21].

[21] `http://mathworld.wolfram.com/RubiksCube.html`, 31.12.2005

5.7 Theoretisches Zugmaximum

Mit der Anzahl möglicher Stellungen lässt sich nun auch die maximal benötigte Zuganzahl berechnen, um einen beliebigen Zustand in einen bestimmten zu überführen. Dies schliesst natürlich das Überführen eines vermischten in den gelösten Zustand mit ein. Dazu stelle man sich einen kompletten Stellungsbaum vor. Jeder Knoten stellt eine Situation dar. Striche bedeuten Züge und Kreuze sind doppelte Knoten, welche nicht weiterentwickelt werden. Ab der vierten Ebene existieren mehr Kreuze als aufgeführt sind-



Züge	Knoten	Stellungen
0	1	1
1	4	5
2	12	17
3	36 – 2 = 34	51
4	102 – 2 – 4*2 = 92	143
5	276 – 4*2 – 12*2 = 244	387

Abbildung 22: Stellungsbaum

Bei der ersten Veränderung sind alle vier möglichen Züge erlaubt. Danach sind pro Knoten nur noch drei erlaubt, denn man darf die Umkehrfunktion nicht anwenden, sonst ist man wieder beim Ausgangszustand (Uu ist verboten). Ab dem dritten muss man bei jedem weiteren Zug Knoten entfernen, da sie bereits im Baum enthalten sind. Dies tritt zum Beispiel bei der Kombination uuu auf, welche eine gleiche Situation erzeugt wie UUU. Somit muss eine von diesen entfernt werden. In der Grafik habe ich jeweils uuu entfernt. Die Kombination $UUUU$ ist ebenfalls schon vorhanden, da sie uu entspricht, also muss auch sie gestrichen werden. O und o verhalten sich analog. Nun tritt dieses Problem nicht nur von der Stammposition ausgehend auf, sondern auch, wenn schon eine beliebige Kombination angewandt wurde: $xUUUU = xuu$ wobei x eine beliebig lange Zugskombination darstellt. Die Anzahl der Knoten die pro Ebene wegfallen ist das doppelte der Knotenanzahl von vier Ebenen höher (damit löscht man die $xUUUU$ und $xOOOO$) plus das doppelte der Knotenzahl von zwei Ebenen höher (um $xuuu$ und $xooo$ auszuräumen). Dies führt zu:

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-4} - 2 \cdot a_{n-3}$$

Damit ist das Problem der doppelten Knoten noch nicht vollständig bewältigt. Denn es kann immer noch Kombinationen geben, welche die oben genannten Bedingunen erfüllen und trotzdem die gleiche Situation erzeugen. Die Angabe dieser Baumentwicklung ist als

Obergrenze zu verstehen. Der reale Baum sieht entweder so oder schmaler aus, das heisst es fallen gleich viele oder mehr Knoten weg.

Der nächste Schritt ist nun eine explizite Summenfunktion für die Reihe zu finden, denn es interessiert die Gesamtanzahl aller Knoten bis zu einer bestimmten Tiefe. Die Tiefe entspricht gerade der benötigten Zuganzahl. Die Summenfunktion könnte man dann mit der im Kapitel vorher gefundenen Stellungszahl gleichsetzen und so eine Aussage über die benötigte Anzahl von Zügen machen. Aber angesichts der Struktur des rekursiven Ausdruckes, entschloss ich mich solange zu rechnen, bis ich in die Region der gewünschten Zahl komme. Und da die Zahl sehr gross ist, liess ich lieber gleich den Computer rechnen[22].

$$S(n) = 1.425.542.100.111.360.000 = 1,425 \cdot 10^{15}$$

Dies liegt zwischen den Werten von 36 und 37:

$$S(36) = 5.96 \cdot 10^{14}$$
$$S(37) = 1.54 \cdot 10^{15}$$

Das bedeutet nun, das 36 Züge nicht ausreichen, um alle möglichen Kombinationen zu erhalten. Möglicherweise liegt die Obergrenze nicht weit davon entfernt, wenn aber weit oben im Baum ein doppelter Knoten vorhanden ist, so ist das reale Maximum schon weit entfernt. Wobei man „weit oben“noch relativieren muss: Der Baum wächst exponentiell. So verfälscht vermutlicherweise schon ein Doppelknoten bei der dreissigsten Ebene das Ergebnis stark. Falls zudem ein Doppelknoten auftritt, ist anzunehmen, dass es nicht nur einen, sondern gleich mehrere gibt.

Zum Vergleich: Bei Rubik's Cube liegt das zurzeit bewiesene Maximum bei 29 Zügen[23]. Engel's Enigma hat mindestens 36 als Maximum, obwohl es weniger mögliche Stellungen bietet (Vgl. Kapitel „Lösbarkeit “, S.25). Der Grund dieser Abweichung liegt wahrscheinlich in der Anzahl möglicher Operationen. Rubik's Cube kann auf sehr viele Arten verdreht werden, während Engel's Enigma nur vier Züge bietet. Von diesen können aber meist nur drei verschiedene eingesetzt werden, ausser man will die vorhergehende Bewegungn rückgängig machen.

5.8 Makroeditor und Lösungsprogramm

Während meiner Arbeit fehlte mir ein Makroeditor, um die gefundenen, zum Teil sehr langen, Züge auf das Puzzle anzuwenden und die Positionierungsbewegungen zu speichern. Ich entschied mich ein kleines Programm zu schreiben, welches über die drei Dateien[24] mit dem Simulationsprogramm kommuniziert. Es bietet Funktionen zum Aufnehmen und Wiedergeben von Zugskombinationen. Es kann auch den inversen Zug abspielen, was bei den Positionierungsbewegungen sehr hilfreich ist. Die gefunden Kombinationen sind fest einprogrammiert.

[22] Siehe S.39.
[23] `http://mathworld.wolfram.com/RubiksCube.html`
[24] Siehe S.5.

Schlussendlich baute ich auch ein vollständig automatisches Lösungssytem ein, welches genau den bisher beschrieben Weg auf das Puzzle anwendet. Für eine genaue Beschreibung des Programmes siehe S.40.

6 Diskussion

6.1 Reflexion

Am Anfang meiner Arbeit, das heisst beim Programmieren des Simulationsprogrammes, konnte ich mich noch mehrheitlich auf meine Erfahrung berufen. Schwierigkeiten bereiteten mir vor allem die Geometrie des Puzzles und gewisse Eigenheiten mit der Grafikausgabe. Programmiertechnisch ist das Programm sicherlich nicht perfekt aufgebaut, aber bei der übersichtlichen Grösse des Projektes fällt dies nicht weiter ins Gewicht.

Schwieriger wurde es bei der Analyse. Es galt aus einem riesigen Bereich das für das Puzzle relevante aufzuspüren. Dies war eindeutig der schwierigste und langwierigste Prozess meiner Arbeit. Ich verbrachte viel zu viel Zeit damit, dahinterzukommen, wie man aus zwei bekannten Permutationen eine bestimmte andere, einfachere (zum Beispiel eine Transposition) aufbauen konnte. Schlussendlich passierte dies einfach durch Ausprobieren. Inzwischen vermute ich aber, dass es keinen anderen praktikablen Weg gibt. Jedenfalls Maple unterstüzt dies nicht, obwohl es sehr viele Möglichkeiten bietet, Permutationsgruppen zu untersuchen.

Sobald einmal klar war, was ich für meine Arbeit brauchte, war die Anwendung unkompliziert. Allerdings geschah diese Auseinandersetzung erst umfassend, als es mir nicht gelang, eine Transposition auf dem Steinfeld zu erzeugen. Mit diesen Kenntnissen sah ich schnell ein, das eine Transposition auf dem Steinfeld unter den gegebenen Voraussetzungen nicht möglich ist. Dies allerdings klar auszuformulieren war weitaus schwieriger. Schlussendlich entdeckte ich erst beim endgültigen Schreiben meiner Arbeit einen einfacheren Erklärungsweg.

Alles in allem bin ich mit meiner Arbeit sehr zufrieden, der gefundene Lösungsweg ist vollständig, wenn auch nicht der schnellste. Die eingesetzten Methoden lassen sich leicht auf ähnliche Puzzles übertragen.

6.2 Ausblick

Obwohl das Puzzle komplett gelöst ist, ist der Lösungsweg nicht optimal. Im Artikel wird ein Lösungsprogramm erwähnt, welches um die 500 Züge benötigt. Dies ist etwa ein Zehntel meines Programmes. Allerdings funktioniert es ebenfalls mit Makrozügen. Deshalb denke ich, dass es nicht allzu schwierig sein sollte, meinen Lösungsweg auf diesen Wert zu senken. Dazu sind vor allem zwei Sachen notwendig: Bessere und mehr Zugskombinationen, damit das Lösungsprogramm differenzierter auf die aktuelle Situation reagieren kann. Eventuell würde es auch etwas bringen, wenn man anstatt der Knochen zuerst die Steine positioniert.

Um einen wirklich optimaleren Lösungsweg zu finden, muss man Abschied von den Makrozügen nehmen. Wenn man in jedem Fall den kürzesten Weg erhalten will, wird man kaum um einen vollständigen Lösungsbaum[25] herumkommen. Aufgrund der Grösse dieses Baumes (man bedenke die Anzahl möglicher Stellungen) ist es mit der aktuellen Computertechnologie nicht möglich solch einen Baum in akzeptabler Zeit aufzubauen. Viel

[25] Entspricht dem Verfahren blind ausprobieren, was sehr zeitaufwendig ist.

erfolgsversprechender wären heuristische Methoden[26] (im Prinzip ein Suchbaum, aber man probiert nicht alle Kombinationen aus sondern nur die, welche genügend gut bewertet werden) oder gar ein genetischer Algorithmus[27](eine beliebige Zugskombination aufstellen, zufällig verändern und so mehrere Kinder erstellen, bewerten, die beste verändern, wiederum Kinder erzeugen, usw.). Beide Varianten wurden erfolgreich auf den Rubiks Cube angewendet[28]. Auf einem Quantencomputer liesse sich das Problem ebenfalls äusserst elegant lösen[29]. Diese Vorgehensweisen haben allerdings den Nachteil, dass sie ein Mensch nicht anwenden kann.

Aber auch ganz abgesehen von einem besseren Lösungsweg gibt es noch viel zu untersuchen. Besonders interessant wäre es, genau zu bestimmen wie viele Züge maximal nötig sind, um das Puzzle von einer beliebigen Kombination in eine beliebige andere zu überführen. Die Kenntnis davon ist unerlässlich, um abzuschätzen wie gross der Suchbaum wird. Ebenfalls interessant wäre es, die schwierigsten Stellungen zu finden, welche die maximale Zuganzahl benötigen um gelöst zu werden.

Das Puzzle liesse sich auch noch beliebig erweitern, indem man eine zusätzliche Scheiben einbaut, also zum Beispiel eine rechts oder links.

[26] `http://de.wikipedia.org/wiki/Heuristik`, 4.1.2006.

[27] `http://de.wikipedia.org/wiki/Genetischer_Algorithmus`, 4.1.2006.

[28] Genetischer Algorithmus: `http://www.tzi.de/~plasmahh/rubik.pdf`, Heuristik: `http://people.sunyit.edu/~millerd1/RUBIK.HTM`

[29] `http://www.bnbt.de/mb/quantencomputer/algorithmen.html#grover`

7 Anhang

7.1 Originalartikel

-

7.2 Literaturverzeichnis

- Arno Mitschka, Elemente der Gruppentheorie. Herder Verlag, 1975.
- John O. Kiltinen, Oval Track and other permutation Puzzles. The Mathematical Association of America, 2003.
- Jürgen Flachsmeyer, Kombinatorik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.

7.3 Inhaltsverzeichnis CD-Rom

- index.htm
  Enthält dieses Inhaltsverzeichniss in erweiterter digitaler Form.
- /Arbeit
  Enthält den gesamten schriftlichen Teil inkl. Latex Quellen und xfig Bilder.
- /Ausprobierprogramme
  - /1_Knochen_Transposition
    Enthält Quelltext, Binärprogramm, Zug-kürzen Script und Ausgabedatei für das Berechnen der Transpositionskombinationen. Die Batch Datei start_do_it.bat vollzieht das Gesamte Experiment.
  - /2_Knochen_keine_Bewegung
    Enthält Quelltext, Binärprogramm, Zug-kürzen Script, Permutationsgeneratorscript und Ausgabedatei. Die Batch Datei start_do_it.bat vollzieht das Gesamte Experiment.
  - /3_Steine_Dreierzyklus
    Enthält Quelltext, Binärprogramm und Ausgabedatei. Die Batch Datei start_do_it.bat vollzieht das Gesamte Experiment.
- /Baumberechner
  Enthält das Baumberechnungsprogramm.
- /cygwin
  Enthält den Cygwin (`http://www.cygwin.com/`) Perl Interpreter für Windows und diverse Perlmodule. Wird benötigt damit die Perlscripte ausführbar sind.
- /LukisEnigma
  Hier befindet sich das Simulationsprogramm inklusive Windows Binärdatei.
  - /Quellen_Linux
    Enthält den Quellcode für Linux.
  - /Quellen_Windows
    Enthält den Quellcode für Windows. Abgesehen von den Dev-C++ Projektdateien und der geänderten platform.h identisch mit dem Linux Quelltext.

- /LukisEnigmaSolver
  Enthält das Lösungsprogramm für LukisEnigma. Läuft auch unter Windows.
- /Quellen
  Enthält sämtliche Quellen aus dem Internet als Kopie.

7.4 Maple Experiment 1: Transpositionen auf dem Knochen und Steinfeld

Vollständige Version auf CD (/Maple/01_Transpositionen.mw)

```
>   with(group):
>   pgknochen := permgroup(11,{[[1,2,3,4,5,6]],[[1,7,8,9,10,11]])
                permgroup(11,{[[1,2,3,4,5,6]],[[1,7,8,9,10,11]])
>   groupmember([[2,3]],pgknochen)
                                        true
```

=> Transpositionen auf dem Knochenfeld möglich.

```
>   pgsteine := permgroup(10,{[[1,2,3,4,5,6]],[[1,6,7,8,9,10]]})
                permgroup(10,{[[1,2,3,4,5,6]],[[1,6,7,8,9,10]]})
>   groupmember([[2,3]],pgsteine)
                                        true
```

=> Transpositionen auf dem Steinfeld möglich.

7.5 Kombinationen zum Austauschen von Knochen

Diese Kombinationen tauschen die Knochen auf den Plätzen 2 und 3 ohne die änderen Steine zu verändern. Es sind nur Kombinationen aufgeführt, welche weniger als 25 Züge benötigen. Vollständige Version auf CD-Rom.
(/Ausprobierprogramme/1_Knochen_Transposition/out.txt).

```
OOOUOUOOuOUOuOUOuuOOO
OOOUOuOOUOUOuOUoouu
OOOUOuOOUOuOUOuoo
OOOUOuOOUOuuOUUOuuooU
OOOUooUOuOUOuuOOUUOuu
OOOUoouuOUUOuuOUOOuOU
OOOuOUOOuOUOuOUoo
OOOuuOUOOuOUOuOUOUOOO
OOOuuOUUOOuuOUOuOUooU
OOOuuooUOuOUOUOOuOU
OOUOUOuOOUOuOUOuuoo
OOUOuOUOOUOuOUoouuO
OOUOuOUOOuOUOuo
OOUOuOUOOuuOUUOuuooUO
OOUUOUOuOOUOuOUOUUUoo
OOUUOuuOUUOOuuOUUOuuo
OOUUUOUOuOOUOuOUOUUoo
OOUooUOuOUOuuOUUOOuuO
OOUoouuOUUOuuOUOuOOUO
OOuOUOuOOUOuOUo
OOuuOUOuOOUOuOUOUoo
OOuuOUUOuuOOUOuOUooUO
OOuuOUUOuuOOUUOuuOUUo
OOuuooUOuOUOUOuOOUO
OUOOOUoouuOUUOuuOOUOu
OUOOOuuooUOuOUOOUOu
OUOUOuOUOOuOUOuuo
OUOUOuOUoouuooUOu
OUOUUOuuOUUooUUUooUOu
OUOuOUOUOOuOUOOOuuOOO
OUOuOUOuOOUOu
OUOuOUooUOOOuuOOUUOuu
OUOuOUoouuOOOUOOuOU
OUOuuOUUOuuOOUUOuuOUo
OUOuuOUUOuuooUooUOu
OUUOUOuOUOOuOUOUUUo
OUUOUOuOUooUUUooUUOuu
OUUOuuOUOuOOUOOOUoouu
OUUOuuOUUOuuOOUUOuu
OUUOuuooUOOOUOuOOUOuu
OUUUOUOuOUOOuOUOUUo
OuOUOUOuOOUOOOuuooU
OuOUOuOUOOuOU
OuOUOuuOUUOOuuOOOUooU
OuOUooUOOOuuOUUOOuuOU
OuOUoouuOOOUOuOOUOU
OuuOOOUOOuOUOUOuOUOOO
OuuOOOUooUOuOUOOuuOUU
OuuOUOuOUOOuOUOUo
OuuOUOuOUooUoouuOUU
OuuOUUOuuOUUOOuuOUU
OuuOUUOuuooUOOOUOOuOU
UOOOUOuOOUOUOuOUooUUU
UOOOUOuOOUOuuOUUOuuoo
UOOOUoouuOUUOuuOUOOuO
UOOOuuOUUOOuuOUOuOUoo
UOOOuuooUOuOUOUOOuO
UOUOOOuuooUOuOUOOUOuu
UOUOUOuOUoouuooUOuu
UOUOuOUOuOOUOuu
UOUOuOUoouuOOOUOOuO
UOUOuuOUUOuuooUooUOuu
UOUUOuuOUUOuuOOUUOUUU
UOuOUOUOuOOUOOOuuoo
UOuOUOuOUOOuO
UOuOUOuuOUUOOuuOOOUoo
UOuOUooUOOOuuOUUOOuuO
UOuOUoouuOOOUOuOOUO
UOuuOOOUooUOuOUOOuuOU
UOuuOUOuOUooUoouuOU
UOuuOUUOuuOUUOOuuOU
UOuuOUUOuuooUOOOUOOuO
UUOOOUOuOOUOUOuOUooUU
UUOUOUOuOUoouuooUOUUU
UUOUOuOUOuOOUOUUU
UUOUUOuuOUUOuuOOUUOUU
UUOuOUOuOUOOuOu
UUOuuOOOUooUOuOUOOuuO
UUOuuOUOuOUooUoouuO
UUOuuOUUOuuOUUOOuuO
UUUOOOUOuOOUOUOuOUooU
UUUOUOUOuOUoouuooUOUU
UUUOUOuOUOuOOUOUU
UUUOUUOuuOUUOuuOOUUOU
UUUOuOUOuOUOOuOuu
UUUOuuOUUOuuOUUOOuuOu
oUoUOUoUOUoUOUO
ooUOOUOuOUOuOUOOuuO
ooUOOuOUOuOUOuOOO
ooUOUoUOUoUOUoUOO
ooUUOOUOuOUOuOUOOUUUO
ooUUUOOUOuOUOuOUOOUUO
oouOOUOuOUOuOUOOO
oouuOOUOuOUOuOUOOUO
uOUOOOUoouuOUUOuuOOUO
uOUOOOuuooUOuOUOOUO
uOUOUOuOUoouuooUO
uOUOUUOuuOUUooUUUooUO
uOUOuOUOuOOUO
uOUOuuOUUOuuooUooUO
uOUUOuuOUUOuuOOUUOu
uOuOUOuOUOOuOUU
uOuuOUUOuuOUUOOuuOUUU
uuOOOUOuOOUOUOuOUoo
uuOOOUooUOuOUOuuOOUUO
uuOUOOOuuooUOuOUOOUOU
uuOUOUOuOUoouuooUOU
uuOUOuOUOuOOUOU
uuOUOuOUooUOOOuuOOUUO
uuOUOuuOUUOuuooUooUOU
uuOUUOUOuOUooUUUooUUO
uuOUUOuuOUOuOOUOOOUoo
uuOUUOuuOUUOuuOOUUO
uuOUUOuuooUOOOUOuOOUO
uuOuOUOuOUOOuOUUU
uuOuuOUUOuuOUUOOuuOuu
```

7.6 Kombinationen für e auf dem Knochenfeld

Eine Auswahl von Kombinationen, welche die Steine nicht bewegen. Die Zahlen geben an, welche Permutation auf dem Steinfeld verursacht wird. Allerdings *nicht* in der Zyklenschreibweise sondern in der Matrizenschreibweise. Vollständige Version auf CD-Rom. (/Ausprobierprogramme/2_Knochen_keine_Bewegung/steinbewegung.txt).

```
018: OOUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUo => 3 7 4 8 6 2 9 10 5 1
020: OOUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOUo => 4 3 7 8 10 2 9 5 6 1
023: OOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOU => 3 4 5 8 7 2 9 10 1 6
024: OOUOUOUOUOUOUOUOUOUOUOUo => 3 4 7 8 5 2 9 10 6 1
027: OOUOUOUOUOUOuOUOUOUOUOUO => 3 4 5 8 6 1 9 10 2 7
029: OOUOUOUOUOUUOUOUOUOUOUUo => 3 4 8 7 1 2 9 10 6 5
033: OOUOUUOUOUOUOUOUUOUOUOUo => 3 5 7 8 4 2 9 6 10 1
036: OUOOOUOUOUOUOUOuOUOUOUOU => 3 7 4 6 8 1 9 10 5 2
038: OUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOU => 3 4 7 5 8 1 9 10 6 2
045: OUOUOUOOUOUOUOUOUOOUOU => 4 3 5 7 8 9 6 10 1 2
047: OUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOU => 2 4 5 7 6 8 9 10 1 3
051: OUOUOUOUOUOUUOUOUOUOUOUo => 3 4 7 5 8 1 9 10 6 2
053: OUOUOUOUOUOuOUOUOUOUOUOO => 2 4 5 6 8 1 9 10 3 7
058: OUOUOUOUOUooUOUOUOUOUOuu => 3 4 5 10 8 7 2 9 1 6
059: OUOUOUOUOuOUOUOUOUOUOOOU => 8 3 5 7 6 2 9 10 1 4
061: OUOUOUOUUOUOUOUOUOUUOU => 6 4 5 7 9 3 8 10 1 2
062: OUOUOUOUUUOUOUOUOUOUoUOU => 8 4 5 9 7 3 6 10 1 2
066: OUOUOUOuOUOUOUOUOUOOOUOU => 5 9 4 7 8 3 6 10 1 2
094: UOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUO => 2 4 5 7 6 8 9 10 1 3
103: UOUOUOUOOOUOUOUOUOUOuOUO => 8 1 5 6 7 3 9 10 4 2
108: UOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOu => 6 4 5 1 7 8 9 2 10 3
110: UOUOUOUOUOUUOUOUOUOUOU => 2 4 5 7 6 8 9 10 1 3
112: UOUOUOUOUOUoUOUOUOUOUOUU => 6 4 5 8 2 7 9 10 1 3
118: UOUOUOUOUoUOUOUOUOUOUUUO => 7 4 5 6 9 3 8 10 2 1
119: UOUOUOUOUooUOUOUOUOUOuuO => 7 4 5 6 10 8 3 9 2 1
121: UOUOUOUOuuOUOUOUOUOUooUO => 3 4 8 5 7 1 9 10 2 6
128: UOUOUOuuOUOUOUOUOUooUOUO => 4 7 5 9 6 8 1 10 2 3
131: UOUOUUUOUOUOUOUOUoUOUOUO => 5 4 9 6 7 10 8 1 2 3
153: UUOUOUOUOUOUOUOUOUOUOUOu => 7 4 5 1 6 8 9 2 3 10
157: UUOUOUOUOUUOUOUOUOUOUUOu => 6 4 5 1 7 8 9 2 10 3
161: UUOUUOUOUOUOUOUUOUOUOUOu => 7 4 5 10 6 8 2 9 3 1
181: oUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOO => 8 3 5 6 7 1 9 10 2 4
182: oUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOUOO => 8 10 5 1 6 7 9 2 3 4
183: oUOUOUOOUOUOUOUOUOOUOUOO => 8 9 6 5 1 7 2 10 3 4
185: oUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOO => 8 7 5 6 1 2 9 10 4 3
186: oUOUOUOUOUOUOUOUOUOUOUOO => 8 2 5 6 1 7 9 10 3 4
187: oUOUOUOUOUOUUOUOUOUOUOUO => 8 3 5 6 7 1 9 10 2 4
200: ooUOUOUOUOUOUUOUOUOUOUOUOO => 2 8 4 6 1 7 9 10 3 5
208: uOOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUU => 7 4 5 9 8 3 2 10 1 6
212: uOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOOUU => 3 4 5 8 7 2 9 10 1 6
216: uOUOUOUOUOUUOUOUOUOUOUUU => 7 4 5 9 8 3 2 10 1 6
219: uOUOUUOUOUOUOUOUUOUOUOUU => 2 4 7 8 9 3 5 10 6 1
```

7.7 Maple Experiment 2: Untersuchung des Steinfeldes

Vollständige Version auf CD (/Maple/02_Steinevertauschen.mw)

```
>   with(group):
>   p1 := convert([8,3,5,6,7,1,9,10,2,4],'disjcyc');
>   p2 := convert([8,10,5,1,6,7,9,2,3,4],'disjcyc');
...
>   p187 := convert([8,10,5,1,6,7,9,2,3,4],'disjcyc');
...
>   p234 := convert([6,4,5,7,9,3,8,10,1,2],'disjcyc');
>   testgroup := permgroup(10,{p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9, p10, p11,
    p12, p13, p14, p15, p16, p17, p18, p19, p20, p21, p22, p23, p24, p25,
    p26, p27, p28, p29, p30, p31, p32, p33, p34, p35, p36, p37, p38, p39,
    p40, p41, p42, p43, p44, p45, p46, p47, p48, p49, p50, p51, p52, p53,
    p54, p55, p56, p57, p58, p59, p60, p61, p62, p63, p64, p65, p66, p67,
    p68, p69, p70, p71, p72, p73, p74, p75, p76, p77, p78, p79, p80, p81,
    p82, p83, p84, p85, p86, p87, p88, p89, p90, p91, p92, p93, p94, p95,
    p96, p97, p98, p99, p100, p101, p102, p103, p104, p105, p106, p107, p108,
    p109, p110, p111, p112, p113, p114, p115, p116, p117, p118, p119, p120,
    p121, p122, p123, p124, p125, p126, p127, p128, p129, p130, p131, p132,
    p133, p134, p135, p136, p137, p138, p139, p140, p141, p142, p143, p144,
    p145, p146, p147, p148, p149, p150, p151, p152, p153, p154, p155, p156,
    p157, p158, p159, p160, p161, p162, p163, p164, p165, p166, p167, p168,
    p169, p170, p171, p172, p173, p174, p175, p176, p177, p178, p179, p180,
    p181, p182, p183, p184, p185, p186, p187, p188, p189, p190, p191, p192,
    p193, p194, p195, p196, p197, p198, p199, p200, p201, p202, p203, p204,
    p205, p206, p207, p208, p209, p210, p211, p212, p213, p214, p215, p216,
    p217, p218, p219, p220, p221, p222, p223, p224, p225, p226, p227, p228,
    p229, p230, p231, p232, p232, p234})
>   groupmember([[1,2]],testgroup)
                                    false
    Transpositionen nicht möglich.
>   groupmember([[1,2,3]],testgroup)
                                    true
    Dreierzyklen möglich
>   newgroup := permgroup(10, {p187,p299})
                      newgroup := permgroup(10,
          {[[1,8,2,10,4],[3,5,6,7,9]],[[1,7,8,3,5],[2,4,9,10,6]]})
>   groupmember([[1,2,3]],newgroup)
    p187 und p200 sind geeignet
```

7.8 Kombinationen für Dreierzyklen auf dem Steinfeld

Kombinationen, welche auf dem Steinfeld die Permutation $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ erzeugen. Vollständige Version auf CD-Rom (/Ausprobierprogramme/3_Steine_Dreierzyklus/out.txt).
$I = UUUOUOUOUOUOUOUOOUOUOUOUOUOUUU$
$P = UUOUOUOUUOUOUOUOUOUUOUOUUUUU$

```
IIIIIIPIIIPPPIIPIPPPIPIIIPI
IIIIIIPIPPIPIIPIPPIIIPPIPI
IIIIIPIIIPPPIIPIIPPIIIPIIII
IIIIIPIIPIIPIIIPIIPPPIIIPIP
IIIIPIIIPPIIIIPPIIIPPIIIIPI
IIIIPPIIIIPIIPPIIIPIPPIIPP
IIIIPPIPIIPIPIPIPPPIIIPIPP
IIIIPPIPIPIIPIPIPPIPPPPII
IIIIPPPIPIPIIPPPIPIIPPPPIPP
IIIIPPPIPIPIPIPIPPPIPPPPII
IIIPIIIPPPIPPIIIIPPIPPP
IIIPIIPIIIPPPIPIPPPPIPPPIP
IIIPIIPIIPIIIIPIPPIIPIPPII
IIIPPIIIPIPPPIIPPPIPIIIPII
IIIPPPIIPPIIIPPIIIIPPIPPP
IIIPPPIIPPPIIIPPIIIPIIPPPIP
IIIPPPIPIIPPIPIIIIPIIPIIII
IIIPPPIPPIPPPIPIIIPIPIIIIPP
IIPIIIIPIPPIIIPPPPIPPIPP
IIPIIIIPIPPPPIIPPIIPIPPIPP
IIPIPIPPPPIPPIPIPPPIIPPPII
IIPIPPPIPIPPPIPIIIIPIPIPII
IIPIPPPIPPIIIIPPPIPPIPPIPI
IIPIPPPPIPIIPPPIIIIPIIIPPIP
IIPPIIIIPPIIIIPIIPPIIIPIPP
IIPPIIIPPPIPPIPPPIPIIIPIPII
IIPPIPIIIPPPIIPPPIPIIPIPPII
IPIIIIIIIIPPPIIPIPPPIPIIIPI
IPIIIIIIPPIPIIPIPPIIIPPIPI
IPIIIPIIIIIPPIIPIPPPIPIIIPI
IPIIIPPIIIIIPIIPIPPPIPIIIPI
IPIIIPPPIIIIIIIPIPPPIPIIIPI
IPIIIPPPIIPIIIIIIPPPIPIIIPI
IPIIIPPPIIPIPIIIIIPPIPIIIPI
IPIIIPPPIIPIPPIIIIIPIPIIIPI
IPIIIPPPIIPIPPPIIIIIIPIIIPI
IPIIIPPPIIPIPPPIPIIIIIIIIPI
IPIIIPPPIIPIPPPIPIIIPI
IPIIIPPPIIPIPPPIPIIIPIIIIII
IPIIIPPPIIPIPPPIPIIIPIPPPPP
IPIIIPPPIIPIPPPIPIIIPPPPPPI
IPIIIPPPIIPIPPPIPIIPPPPPIPI
IPIIIPPPIIPIPPPIPIPPPPPIIPI
IPIIIPPPIIPIPPPIPPPPPPIIIPI
IPIIIPPPIIPIPPPPPPPPIPIIIPI
IPIIIPPPIIPPPIPIIPIPPIIIIPP
IPIIIPPPIIPPPPPPIPPPIPIIIPI
IPIIIPPPIPPPPPIPIPPPIPIIIPI
IPIIIPPPPPPPPIIPIPPPIPIIIPI
IPIIPPIPIIIIPPPIPIPIIIPIIII
IPIIPPPIPIIIPIPPPIIIIPPIPI
IPIIPPPPIPPPIPIPPIPIPIIPPI
IPIIPPPPPIPPPIIPIPPPIPIIIPI
IPIPIIIIIPIPIIPIPPIIIPPIPI
IPIPIIIIPPIIPIPIPPPIPPPIII
IPIPIIPIPIIIPIIIPPIPPIPIII
IPIPIPIPIIIPIPIPIIIPPIPI
IPIPPIIIIIIPIIPIPPIIIPPIPI
IPIPPIPIIIIIIIPIPPIIIPPIPI
IPIPPIPIIPIIIIIIPPIIIPPIPI
IPIPPIPIIPIPIIIIIPIIIPPIPI
IPIPPIPIIPIPPIIIIIIIIPPIPI
IPIPPIPIIPIPPIIIPIIIIIPIPI
IPIPPIPIIPIPPIIIPPIIIIIIPI
IPIPPIPIIPIPPIIIPPIPI
IPIPPIPIIPIPPIIIPPIPIIIIII
IPIPPIPIIPIPPIIIPPIPIPPPPP
IPIPPIPIIPIPPIIIPPIPPPPPPI
IPIPPIPIIPIPPIIIPPPPPPPIPI
IPIPPIPIIPIPPIIPPPPPIPPIPI
IPIPPIPIIPIPPIPPPPPIIPPIPI
IPIPPIPIIPIPPPPPPPIIIPPIPI
IPIPPIPIIPPPPPPIPPIIIPPIPI
IPIPPIPIPPPPPIPIPPIIIPPIPI
IPIPPIPPPPPPIIPIPPIIIPPIPI
IPIPPPIPPPPIPIPPIIPIPIPPI
IPIPPPPPIIPPPIIPIPPPIPIIIPI
IPIPPPPPPPIPIIPIPPIIIPPIPI
IPPIIPIPIPPIIPIPPPIPPPPIP
IPPIPIIIPPIIIIPPPIPPPPIPIPP
IPPIPIIPPIPPIIPIPPIPIIP
IPPPIIPIPPPIPPPPIPPIPIPIPPI
IPPPIIPPIIIIPIPPPIPIIIPI
IPPPIPIPIPPPPIPPPIPIPIPPPP
IPPPIPPPPIIPIPPPIPIPIPIIPPI
IPPPPIPPPIIIPIIPIIIPIPIPIP
IPPPPPPIIIPPPIIPIPPPIPIIIPI
IPPPPPPIPPIPIIPIPPIIIPPIPI
PIIIIIIIIPPPIIPIIPPIIIPIIII
PIIIIIIIPIIPIIIPIIPPPIIIPIP
PIIIPIIIIIPPIIPIIPPIIIPIIII
PIIIPIIPPIPPIPIPIPPIPPPIIII
PIIIPPIIIIIPIIPIIPPIIIPIIII
PIIIPPPIIIIIIIPIIPPIIIPIIII
PIIIPPPIIPIIIIIIIPPIIIPIIII
PIIIPPPIIPIIPIIIIIPIIIPIIII
PIIIPPPIIPIIPPIIIIIIIIPIIII
PIIIPPPIIPIIPPIIIPIIII
PIIIPPPIIPIIPPIIIPIIIIIIIII
PIIIPPPIIPIIPPIIIPIIIIPPPPP
PIIIPPPIIPIIPPIIIPIIIPPPPPI
PIIIPPPIIPIIPPIIIPIIPPPPPII
PIIIPPPIIPIIPPIIIPIPPPPPIII
PIIIPPPIIPIIPPIIIPPPPPPIIII
PIIIPPPIIPIIPPIIPPPPPIPIIII
PIIIPPPIIPIIPPIPPPPPIIPIIII
PIIIPPPIIPIIPPPPPPPIIIPIIII
PIIIPPPIIPIPPPPPIPPIIIPIIII
PIIIPPPIIPPPPIIIPPPIPIIII
PIIIPPPIIPPPPPPIIPPIIIPIIII
PIIIPPPIPPPPPIPIIPPIIIPIIII
PIIIPPPPPPPPIIPIIPPIIIPIIII
PIIPIIIIIIIPIIIPIIPPPIIIPIP
PIIPIIPIIIIIIIIPIIPPPIIIPIP
PIIPIIPIIIPIIIIIIIPPPIIIPIP
PIIPIIPIIIPIIIIPPIIPPPPIP
PIIPIIPIIIPIIPIIIIIPPIIIPIP
PIIPIIPIIIPIIPPIIIIIPIIIPIP
PIIPIIPIIIPIIPPPIIIIIIIIPIP
PIIPIIPIIIPIIPPPIIIPIIIIIIP
PIIPIIPIIIPIIPPPIIIPIP
PIIPIIPIIIPIIPPPIIIPIPIIIII
PIIPIIPIIIPIIPPPIIIPIPPPPPP
PIIPIIPIIIPIIPPPIIIPPPPPPIP
PIIPIIPIIIPIIPPPIIPPPPPIPIP
PIIPIIPIIIPIIPPPIPPPPPIIPIP
PIIPIIPIIIPIIPPPPPPPPIIIPIP
PIIPIIPIIIPIPPPPPIPPPIIIPIP
PIIPIIPIIIPPPPPPIIPPPIIIPIP
PIIPIIPIIPPPPPIPIIPPPIIIPIP
PIIPIIPIPPPPPIIPIIPPPIIIPIP
PIIPIIPPPPPPIIIPIIPPPIIIPIP
PIIPIPPPPIIPIPPPIPPIIIIPPPP
PIIPIPPPPPIPIIIPIIPPPIIIPIP
PIIPPPPPIPPPIIPIIPPIIIPIIII
PIIPPPPPPIIPIIIPIIPPPIIIPIP
PIPIIIIPIPPIPIPPPPIIPPIPI
PIPIIIPIIPPPIIIPIIPPIPPIPI
PIPIIPIIIIPIIIPPPIIPIPIPI
PIPIIPIIIIPIIPPIIIIPIIIIPIP
PIPIIPIIIIPPPIIPPIIIIPIPIPI
PIPIIPIPPIIIPPPPIPIPPIPPIP
PIPIIPPPIIPPIPPIPPIIPIPIIII
PIPIIPPPIPPPIIIIPPPIPIPIIII
PIPIPIPIPIPIIPIIIPPIPPIPIII
PIPIPIPIPPPPIPIIPIIIIPIIIIP
PIPIPPPIPIIPPPPIPIPIIIIPPPP
PIPPPPPIIPPPIIPIIPPIIIPIIII
PIPPPPPIPIIPIIIPIIPPPIIIPIP
PPIIIIPIIPIIPIPIPIPIIIPPI
PPIIIIPIIPPIPIIPIPPIPPIPPPI
PPIIIPIPIPIIPPPIIPIPIPIIPPP
PPIIPIIPIIPPIIPIIPIPIPPPIIP
PPIIPPIIIIPPIIIPPIIIIPPIPPP
PPIIPPIPPIIPPPPIIIPIIPPPIP
PPIIPPPIPIIPIIIIPPPIPIPPPPI
PPIPIPIIIIPIIPIPPPPIIPIIIP
PPIPIPIIPIIPPIIPIIPIIPPPIIP
PPPIIIIPIPIIIIPPIIPIPIPPPI
PPPIIIPIIIPPPIIPIIPPIIIPIPP
PPPIIPPIIIIPIIPPIIIPIIII
PPPIIPPIIIIPPPPIIIPPPIPIIII
PPPIIPPPIIPIPIIPIPPPPIPIIII
PPPIPPPIPIIPPIPIIIIPIIPIPP
PPPPPIPIIIPPPIIPIPPPIPIIIPI
PPPPPIPIPPIPIIPIPPIIIPPIPI
PPPPPPIIIPPPIIPIIPPIIIPIIII
PPPPPPIIPIIPIIIPIIPPPIIIPIP
```

7.9 Wachstum des Stellungsbaumes

Dies ist die Ausgabe des baumberechners. Es befindet sich auf der CD-Rom (/Baumberechner/baumberechner). „Zahl“gibt an, wie viele Knoten die aktuelle Ebene enthält. „Summe“gibt die Summe der Knoten bis und mit der entsprechenden Ebene an.

```
1: Zahl: 1                              Summe: 1
2: Zahl: 4                              Summe: 5
3: Zahl: 12                             Summe: 17
4: Zahl: 34                             Summe: 51
5: Zahl: 92                             Summe: 143
6: Zahl: 244                            Summe: 387
7: Zahl: 640                            Summe: 1027
8: Zahl: 1668                           Summe: 2695
9: Zahl: 4332                           Summe: 7027
10: Zahl: 11228                         Summe: 18255
11: Zahl: 29068                         Summe: 47323
12: Zahl: 75204                         Summe: 122527
13: Zahl: 194492                        Summe: 317019
14: Zahl: 502884                        Summe: 819903
15: Zahl: 1300108                       Summe: 2120011
16: Zahl: 3360932                       Summe: 5480943
17: Zahl: 8688044                       Summe: 14168987
18: Zahl: 22458148                      Summe: 36627135
19: Zahl: 58052364                      Summe: 94679499
20: Zahl: 150059140                     Summe: 244738639
21: Zahl: 387885036                     Summe: 632623675
22: Zahl: 1002634084                    Summe: 1635257759
23: Zahl: 2591679244                    Summe: 4226937003
24: Zahl: 6699149380                    Summe: 10926086383
25: Zahl: 17316409900                   Summe: 28242496283
26: Zahl: 44760603044                   Summe: 73003099327
27: Zahl: 115700151884                  Summe: 188703251211
28: Zahl: 299069337092                  Summe: 487772588303
29: Zahl: 773053985388                  Summe: 1260826573691
30: Zahl: 1998240446308                 Summe: 3259067019999
31: Zahl: 5165182360972                 Summe: 8424249380971
32: Zahl: 13351300437956                Summe: 21775549818927
33: Zahl: 34511312450476                Summe: 56286862269403
34: Zahl: 89207091736868                Summe: 145493954006271
35: Zahl: 230588309612748               Summe: 376082263619019
36: Zahl: 596039703061380               Summe: 972121966680399
37: Zahl: 1.54068230080945e+15          Summe: 2.51280426748985e+15
38: Zahl: 3.98245609972912e+15          Summe: 6.49526036721898e+15
39: Zahl: 1.02941122738391e+16          Summe: 1.67893726410581e+16
40: Zahl: 2.66088928137757e+16          Summe: 4.33982654548338e+16
41: Zahl: 6.87804016402499e+16          Summe: 1.12178667095084e+17
42: Zahl: 1.77788068173613e+17          Summe: 2.89966735268697e+17
43: Zahl: 4.5955819434561e+17           Summe: 7.49524929614307e+17
44: Zahl: 1.18789599412878e+18          Summe: 1.93742092374309e+18
45: Zahl: 3.07055104275861e+18          Summe: 5.0079719665017e+18
46: Zahl: 7.93696060323739e+18          Summe: 1.29449325697391e+19
47: Zahl: 2.05159734327634e+19          Summe: 3.34609060025025e+19
48: Zahl: 5.30310262245154e+19          Summe: 8.64919322270179e+19
49: Zahl: 1.37078055381554e+20          Summe: 2.23569987608572e+20
50: Zahl: 3.54328298072661e+20          Summe: 5.77898285681233e+20
```

7.10 Hinweise zum Lösungsprogramm

Das Programm hat nur eine Textoberfläche. Mit 'help' werden alle Befehle und alle gespeicherten Makros angezeigt. Eine Makroaufzeichnung kann mit 'startrec *Makroname*' gestartet und mit 'stoprec' angehalten werden. Das Makro kann mit 'play *Makroname*' erneut abgespielt werden. Mit 'playrev *Makroname*' wird das Makro invertiert abgespielt.'quit' beendet das Makroprogramm. Mit 'solve' wird das Spiel automatisch gelöst. 'show *Makroname* zeigt ein Makro an ohne es abzuspielen. 'mix' vermischt das Spielfeld und 'demo' schaltet in den Demomodus, welcher dauernd das Spielfeld vermischt und wieder löst.

Mit 'slomo *Zeit*' kann man die Ausgabe der Züge verlangsamen. Die Zeit (in Sekunden) gibt die Wartezeit zwischen zwei Zügen an. Es sind nicht nur ganze Zahlen erlaubt, sondern zum Beispiel auch 0.4. Diese Einstellung wirkt sich auf alle abgeschickten Züge aus. Bei solve werden aber die Makrozüge weiterhin in einem Zug ausgeführt, um auch diese langsam auszuführen kann man mit 'skip' diesen Modus aus, beziehungsweise einschalten.

Das Programm ist aufgeteilt in zwei Dateien 'macro' bzw. 'macro_win' sind die Dateien die Ausgeführt werden und enthalten den Makroeditor sowie die Kommunikationsfunktionen mit dem Simulationsprogramm. 'EnigmaSolve.pm' ist eine Perl Moduldatei und enthält die gesamte Logik für das automatische Lösen.